Практическое занятие 1

Практическое занятие 1 состоит из 1 блока:

- в 1 блоке изучается методы решения задач статики (тема 2).

1 блок

Теоретическая часть:

– Лекция 1;

– Алгоритм решения задач статики:

1. Составить силовую схему, выполнив следующее:

- выбрать объект рассмотрения (рассматриваемую механическую систему), отбросив при этом все остальные тела;
- заменить влияние отброшенных тел силами, приложенными к точкам рассматриваемой механической системы;
- заменить отброшенные связи их реакциями;
- заменить распределенные нагрузки эквивалентными сосредоточенными силами;
- заменить пары сил их моментами.

2. Записать систему уравнений равновесия для составленной силовой схемы.

3. Решая полученную систему уравнений, найти неизвестные силы или/и реакции.

Практическая часть:

ЗАДАЧА 1.

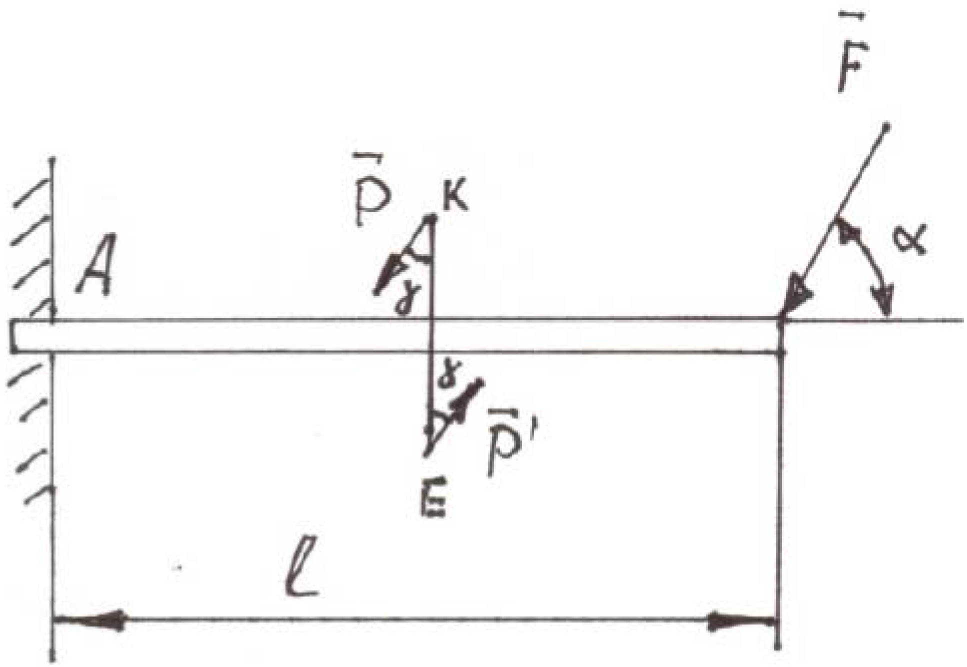


Рис.1

Найти реакции у закрепленного в т. А стержня, изображенного на рис.1, если его длина ℓ = 0,6 м, КЕ = 0,2 м, углы $\alpha = 60^0$, $\gamma = 30^0$, а силы, соответственно, равны F = 10 Н, $P = P'$ =25 Н.

Решение.

Используем алгоритм решения задач статики.

Выберем традиционное направление координатных осей, ось x - слева направо, ось y – снизу вверх (рис. 3).

Нарисуем силовую схему задачи (рис. 3). Учтем при этом, что т. А – плоская заделка, имеющая три компонента реакции: два силовых X_A и Y_A, и один моментный – момент M_A. Ориентируем эти неизвестные компоненты реакции по положительным направлениям (по осям x и y силы $\boldsymbol{X}_A$ и $\boldsymbol{Y}_A$, против хода часов – момент M_A). Пару сил $(\vec{P}, \vec{P}')$ заменим направленным против хода часовой стрелки моментом пары $M = P \cdot КД$. Здесь $КД = KE \cdot sin\gamma$ - плечо пары, определяемое как расстояние между линиями действия сил пары (рисунки 2 и 3).

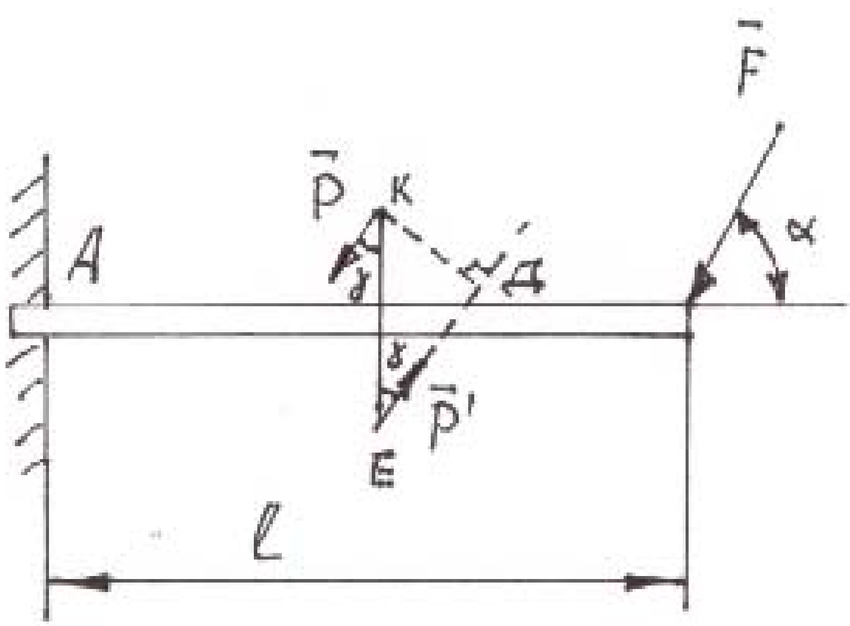


Рис.2

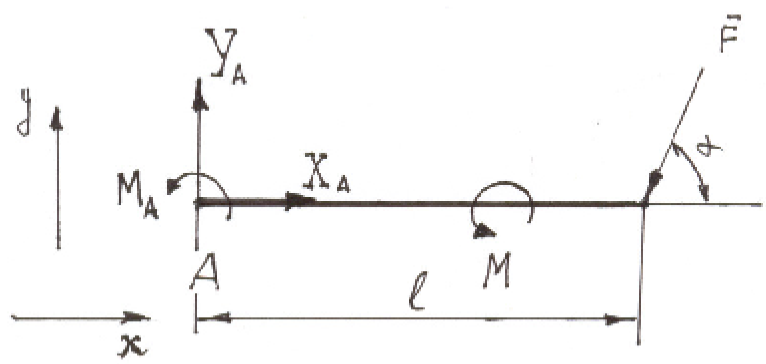


Рис.3

Напишем уравнения равновесия для плоской системы сил вида (1.32):

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0: \qquad X_A\, cos\,0^o + Y_A\, cos\,90^o + F\, cos(180^o - \alpha) = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0: \qquad X_A\, cos\,90^o + Y_A\, cos\,0^o + F\, cos(90^o + \alpha) = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} M_A(\overrightarrow{F_k}) = 0: \ X_A \cdot 0 + Y_A \cdot 0 + M_A + M - F \cdot h = 0. \end{cases}$$

Напомним, что, проекцией силы на ось есть произведение модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси (см. раздел 1.2.1).

В первом уравнении условий равновесия проекция $\boldsymbol{Y}_A$ равна нулю в силу ее перпендикулярности оси x ($cos\,90^o = 0$). Угол между положительными направлениями силы $\boldsymbol{X}_A$ и оси x равен 0^o ($cos\,0^o = 1$). Угол между положительными направлениями силы $\boldsymbol{F}$ и оси x (рис.4) равен (180^o–α), причем по формулам приведения $cos(180^\circ - \alpha) = -cos\,\alpha$. Моменты M_A и M в уравнения проекций не входят.

Во втором уравнении проекция $\boldsymbol{X}_A$ равна нулю в силу ее перпендикулярности оси y. Угол между положительными направлениями силы $\boldsymbol{Y}_A$ и оси y равен 0^o ($cos\,0^o = 1$). Угол между положительными направлениями силы $\boldsymbol{F}$ и оси y равен (90^o+α), причем по формулам приведения $cos(90^\circ + \alpha) = -\,sin\,\alpha$.

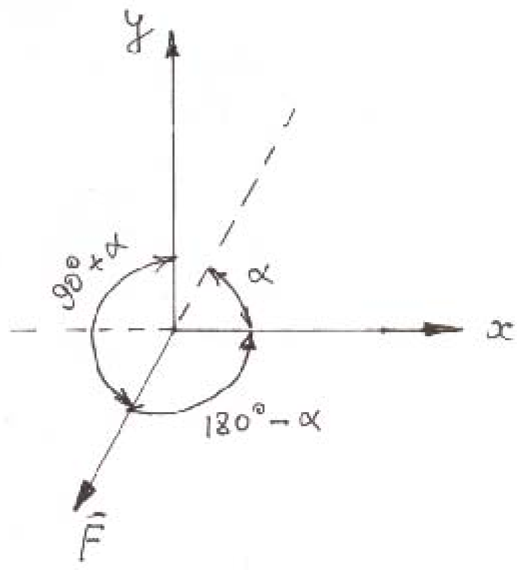


Рис.4

Моменты M_A и M в силовой схеме ориентированы против хода часовой стрелки, поэтому в третьем, моментном уравнении они присутствуют с положительным знаком. Напомним, что алгебраическим момент силы равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на плечо силы.

Поскольку линии действий сил $\boldsymbol{X}_A$ и $\boldsymbol{Y}_A$ проходят через точку А, их плечи равны нулю.

Сила $\boldsymbol{F}$ стремится повернуть тело вокруг т.А по ходу часовой стрелки, поэтому ее момент в третьем уравнении равновесия отрицателен. Плечо h силы $\boldsymbol{F}$ (рис.5) может быть найдено как противолежащий углу α катет прямоугольного треугольника АВС с известной гипотенузой АВ, равной ℓ: $h = \ell \cdot sin\alpha$.

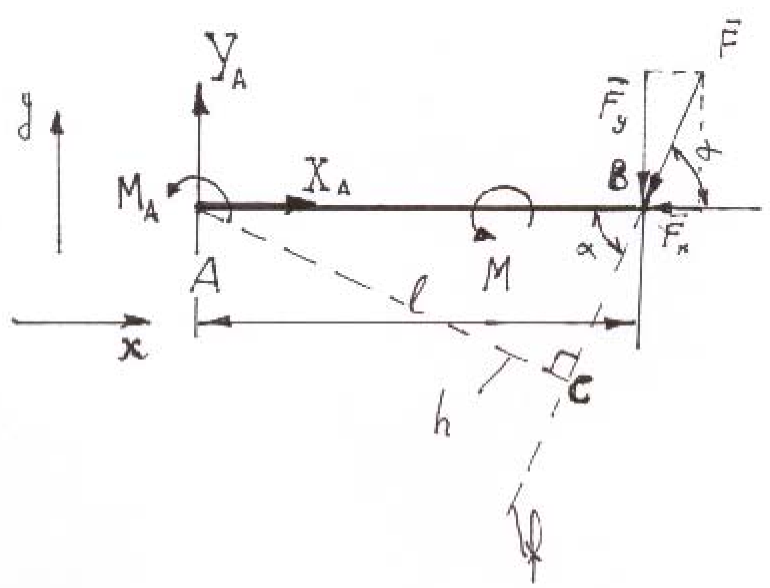


Рис.5

Тогда уравнения равновесия приобретут вид:

$$\begin{cases} X_A - F\cos\alpha = 0; \\ Y_A - F\sin\alpha = 0; \\ M_A + M - F\cdot\ell\sin\alpha = 0. \end{cases}$$

Момент силы ***F*** можно получить, используя теорему Вариньона. Для этого разложим силу ***F*** на горизонтальную (***F***$_X$) и вертикальную (***F***$_Y$) ее составляющие (рис.5), причем их модули $F_X = F\cos\alpha,\ \ F_Y = F\sin\alpha$. Линия действия горизонтальной составляющей проходит через т.А, поэтому плечо, а следовательно, и момент F_X относительно этой точки равны нулю ($M_A(\vec{F}_X) = 0$). Плечо вертикальной составляющей равно АВ, т.е. длине ℓ. Учтя направление этой составляющей, стремящейся повернуть тело часовой стрелке, получим значение ее момента относительно т.А $M_A(\vec{F}_Y) = -F\sin\alpha\cdot\ell$. Суммарный момент, в соответствии с теоремой Вариньона, равен моменту самой силы: $M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}_X) + M_A(\vec{F}_Y) = M_A(\vec{F}_Y) = -F\sin\alpha\cdot\ell$. Эта оценка соответствует предыдущему результату, полученному через плечо *h* силы ***F***.

Следует отметить, что рассмотренный способ определения алгебраического момента силы через сумму моментов ее составляющих особенно эффективен при затруднениях, вызванных сложностью прямой оценки плеча силы, и поэтому этот способ может быть предложен как универсальный.

Решение составленной системы уравнений равновесия очевидно. Из первого уравнения следует, что

$$X_A = F\cos\alpha\,,$$

из второго:

$$Y_A = F\sin\alpha\,,$$

из третьего:

$$M_A = -M + F\cdot\ell\sin\alpha = -P\cdot KE\sin\gamma + F\cdot\ell\sin\alpha\,.$$

Полученные выражения есть *расчетные формулы*, т.е. равенства, в левых частях которых – искомые в задаче величины, а в правой – выражения, где фигурируют только заданные в задаче исходные данные.

Численная оценка искомых величин таковa:

$$X_A = (10H)\cos 60^\circ = 10\cdot\frac{1}{2} = 5\ H\,,$$

$$Y_A = (10H)\sin 60^\circ = 10\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 8{,}66\ H\,,$$

$$M_A = -(25H)\cdot(0{,}2м)\sin 30^\circ + (10H)\cdot(0{,}6м)\sin 60^\circ =$$

$$= -5\frac{1}{2} + 6\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 2{,}70\ H\cdot м.$$

Положительные знаки у оцененных величинах указывают на то, что направления их действия соответствуют выбранным на силовой схеме (рис. 3).

ОТВЕТ: $X_A = 5H$, $Y_A \simeq 8{,}66H$, $M_A \simeq 2{,}70\ H\cdot м.$

ЗАДАЧА 2.

Найти реакции у закрепленного в точках А и В стержня, изображенного на рис.6, если a = 0,5 м, q = 10 Н/м, $q_{\max}$ = 15 Н/м, $\alpha = 60^0$, F = 30 Н, M = 25 Н·м.

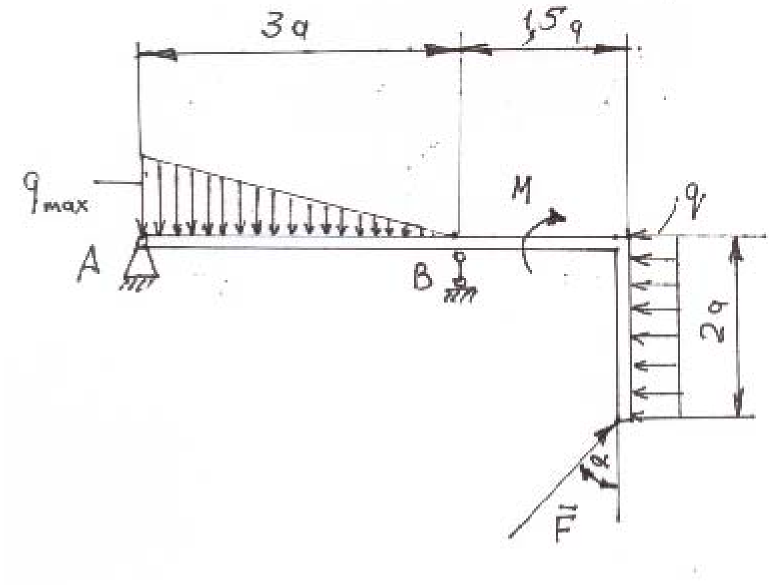


Рис.6

<u>Решение.</u>

Составим силовую схему, выбрав традиционные направления осей координат (рис. 7).

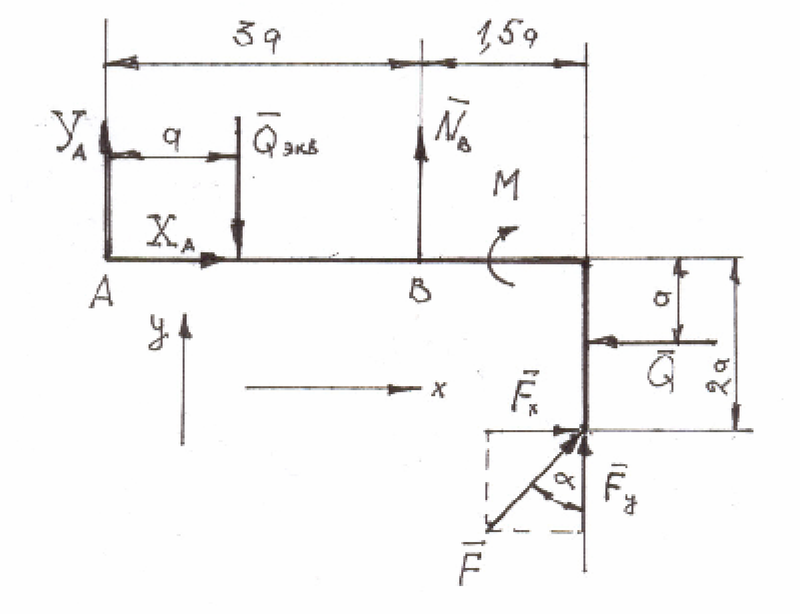


Рис.7

На указанной схеме задачи точка А – цилиндрический шарнир, реакция которого имеет две ортогональные составляющие $\boldsymbol{X}_A$ и $\boldsymbol{Y}_A$. Точка В – гладкая опора, или невесомый шарнирно опертый стержень, реакции которых $\vec{N}_B$ идентичны и направлены по нормали к поверхности - $\vec{N}_B$. Линейно распределенная на участке АВ нагрузка заменена эквивалентной сосредоточенной нагрузкой $Q_{экв} = \frac{1}{2} q_{max} 3a = \frac{3}{2} q_{max} a$, при этом ее точка приложения отстоит от точки с максимальной интенсивностью (т.А) на треть всей длины АВ, т.е. на расстоянии *a*. Равномерно распределенная на вертикальном участке стержня нагрузка заменена сосредоточенной силой $Q = q \cdot 2a = 2qa$, приложенной в середине этого участка. Для удобства составления моментного уравнения равновесия сила ***F*** разложена на горизонтальную $\boldsymbol{F}_X$ и вертикальную $\boldsymbol{F}_Y$ составляющие, модули которых, соответственно, равны $F_X = F \sin\alpha$; $F_Y = F \cos\alpha$ (напомним, что на рисунке α – угол между вектором силы ***F*** и *вертикальной* осью z).

При составлении моментного уравнения относительно точки А воспользуемся теоремой Вариньона (см. предыдущий пример), причем плечо $\boldsymbol{F}_X$ равно 2*a*, а плечо $\boldsymbol{F}_Y$, соответственно, равно 4,5*a*. Учтем также, что момент пары сил *M* и моменты $M_A(\vec{Q}_{экв})$, $M_A(\vec{Q})$ направлены по ходу часовой стрелки и фигурируют в моментном уравнении с отрицательным знаком. Плечи остальных сил в силовой схеме равны, соответственно: для $\boldsymbol{X}_A$ и $\boldsymbol{Y}_A$ - 0, для $\vec{Q}_{экв}$ и $\vec{Q}$ - по *a*, для $\vec{N}_B$ - 3*a*. Тогда уравнения равновесия для плоской системы сил типа (1.32) приобретут вид:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0: & X_A - Q + F_X = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0: & Y_A - Q_{экв} + N_B + F_Y = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} M_A(\overrightarrow{F_k}) = 0: & -Q_{экв} a + N_B 3a - M - Qa + F_X 2a + F_Y 4{,}5a = 0. \end{cases}$$

Подставив выражения для модулей сил $\boldsymbol{F}_X$ и $\boldsymbol{F}_Y$, получим:

$$\begin{cases} X_A - Q + F \sin\alpha = 0; \\ Y_A - Q_{экв} + N_B + F \cos\alpha = 0; \\ -Q_{экв} a + N_B 3a - M - Qa + 2Fa \sin\alpha + 4{,}5Fa \cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Решение системы уравнений равновесия очевидно.

Из первого уравнения следует:

$$X_A = Q - F \sin\alpha,$$

из третьего:

$$N_B = \frac{M}{3a} + \frac{1}{3}(Q_{экв} + Q) - \frac{1}{3}(2\sin\alpha + 4{,}5\cos\alpha)F.$$

Из второго уравнения системы: $Y_A = Q_{экв} - N_B - F\cos\alpha$. Подставив выражение для N_B, получим:

$$Y_A = -\frac{M}{3a} + \frac{2}{3}Q_{экв} - \frac{1}{3}Q + \frac{1}{3}(2\sin\alpha + 1{,}5\cos\alpha)F.$$

Используя выражения для эквивалентных сил $\vec{Q}_{экв}$ и $\vec{Q}$, получим расчетные формулы задачи:

$$X_A = 2qa - F\sin\alpha;$$
$$Y_A = -\frac{M}{3a} + (q_{max} - \frac{2}{3}q)a + \frac{1}{3}(2\sin\alpha + 1{,}5\cos\alpha)F;$$
$$N_B = \frac{M}{3a} + (\frac{1}{2}q_{max} + \frac{2}{3}q)a - \frac{1}{3}(2\sin\alpha + 4{,}5\cos\alpha)F.$$

Найдем численные значения искомых величин:

$$X_A = 2(10\ Н/м)(0{,}5\ м) - (30Н)\sin 60^\circ \simeq (10 - 25{,}98)Н \simeq -15{,}98Н;$$
$$Y_A = -\frac{25Н\cdot м}{3(0{,}5м)} + (15Н/м - \frac{2}{3}10Н/м)(0{,}5м) + \frac{1}{3}(2\sin 60^\circ + 1{,}5\cos 60^\circ)(30Н) =$$
$$\simeq (-16{,}67 + 4{,}17 + 24{,}82)Н \simeq 12{,}32\ Н;$$
$$N_B = \frac{25Н\cdot м}{3(0{,}5м)} + (\frac{1}{2}(15Н/м) + \frac{2}{3}(10Н/м))(0{,}5м) - \frac{1}{3}(2\sin 60^\circ + 4{,}5\cos 60^\circ)(30Н) =$$
$$\simeq (16{,}67 + 7{,}09 - 39{,}82)Н \simeq -16{,}06\ Н.$$

Отрицательные знаки в значениях реакций X_A и N_B указывают на то, что их действия противоположны выбранным направлениям на силовой схеме (рис. 7), а действие реакции $\boldsymbol{Y}_A$ соответствует указанному направлению.

ОТВЕТ: $X_A \simeq -15{,}98Н$, $Y_A \simeq 12{,}32Н$, $N_B \simeq -16{,}06\ Н$.

ЗАДАЧА 3.

(см. пример из раздела 1.3.1).

К вершинам квадрата (рис. 1.30) со стороной $a=0.5\ м$ приложены силы: $F_1=4\ Н$; $F_2=F_3=8\ Н$; $F_4=12\ Н$. Определить главный вектор этой системы сил и её главный алгебраический момент относительно центра квадрата 0.

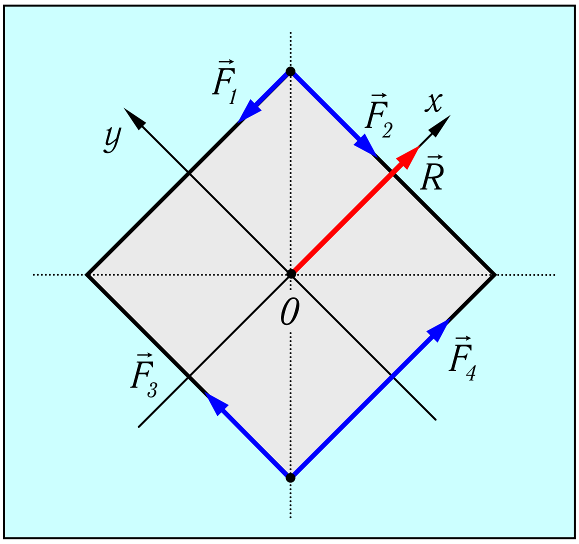


Рис. 1.30. Определение главного вектора системы сил и её главного алгебраического момента

Решение. Введем координатную систему $0xy$, оси которой параллельны сторонам квадрата. Силы $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ образуют пару сил с моментом

$$M_{23} = F_2 \cdot a = -4\ H$$

и их можно не учитывать при вычислении проекций главного вектора $\boldsymbol{R}$:

$$R_X = F_{1X} + F_{4X} = -F_1 + F_4 = -4 + 12 = 8\ H;$$

$$R_Y = F_{1Y} + F_{4Y} = 0$$

Вычисление главного алгебраического момента M_0 проведем с использованием плеч сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_4$, равных половине длины стороны квадрата:

$$M_0 = F_1 \cdot \frac{a}{2} - F_4 \cdot \frac{a}{2} + M_{23} = 4 \cdot \frac{0.5}{2} - 12 \cdot \frac{0.5}{2} + 8 \cdot 0.5 = 0$$

Таким образом, для заданной системы сил её главный вектор равен по модулю $R=8\ H$ и направлен вдоль оси $0x$, а её главный алгебраический момент $M_0=0$.

<u>ЗАДАЧА 4</u>.

(см. пример из раздела 1.3.5).

Пример. Определить реакции шарнирных опор A и B балки, находящейся под действием сосредоточенной силы $F=60\ H$, равномерно распределенной нагрузки с интенсивностью $q=15\ H/м$ и пары сил с моментом $M=40\ H{\cdot}м$; расстояние $a=1\ м$ (рис. 1.37).

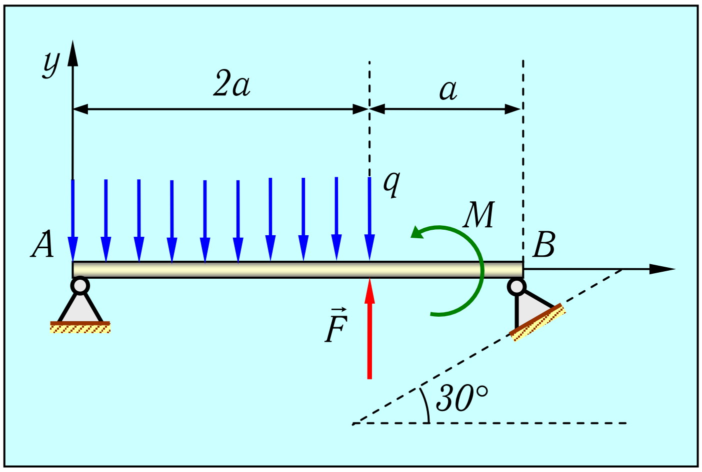


Рис. 1.37. Балка под действием распределенной и сосредоточенной нагрузки

Решение. Введем систему координат $0xy$, совместив начало координат 0 с неподвижным шарниром A и направив ось $0x$ вдоль балки. Для определения опорных реакций рассмотрим равновесие балки. К ней приложены активные силы: сила $\boldsymbol{F}$, пара сил с моментом M и равномерно распределенная нагрузка q. Заменим распределенную нагрузку эквивалентной сосредоточенной силой $\boldsymbol{Q}$, равной по модулю $Q=q{\cdot}2a=30\ H$ и приложенной в средней точке нагруженного участка. На балку наложены две связи: неподвижная шарнирная опора в точке A и подвижная шарнирная опора (каток) в точке B. Отбросим мысленно эти связи, заменив их соответствующими реакциями. Реакция $\boldsymbol{R}_A$ неизвестна по величине и направлению, поэтому разложим её на две неизвестные по величине составляющие $\boldsymbol{X}_A$, $\boldsymbol{Y}_A$ направленные по координатным осям. Опора в точке B не препятствует её перемещению вдоль наклонной плоскости и, следовательно, реакцию $\boldsymbol{R}_B$ следует направить перпендикулярно наклонной плоскости, то есть эта реакция известна по направлению, но неизвестна по величине.

Приведенные выше действия можно назвать составление эквивалентной силовой схемы (рис. 1.38)

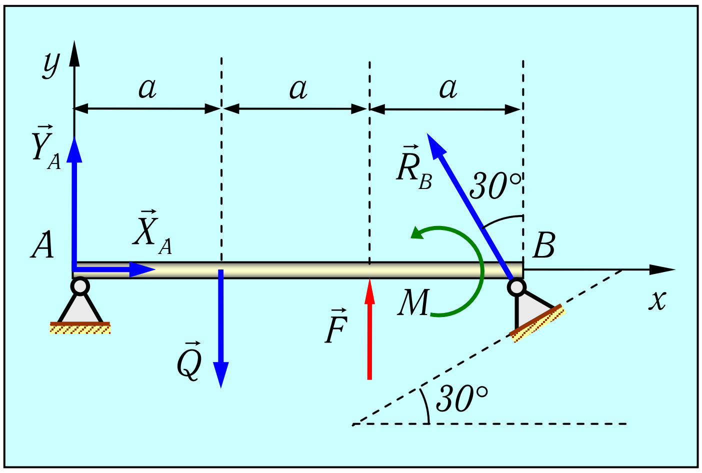


Рис. 1.38. Эквивалентная силовая схема

Таким образом, в задаче имеется три неизвестных скалярных величины: X_A, Y_A, R_B. Поскольку для произвольной плоской системы сил имеется три независимых уравнения равновесия, данная задача является **статически определимой** (то есть для определения всех величин достаточно уравнений равновесия).

Составим уравнения равновесия для полученной эквивалентной силовой схемы. Эти уравнения равновесия записываются в рассматриваемом примере следующим образом:

$$\sum F_{kX} = 0: \qquad X_A - R_B \sin 30^\circ = 0$$
$$\sum F_{kY} = 0: \qquad Y_A - Q + F + R_B \cos 30^\circ = 0$$
$$\sum M_A\left(\vec{F}_k\right) = 0: \quad -Q \cdot a + F \cdot 2a + M + \left(R_B \cos 30^\circ\right) \cdot 3a = 0$$

Напомним, что алгебраические моменты сил берутся со знаком плюс, если они направлены против хода часовой стрелки. При вычислении момента реакции R_B относительно точки A выделена её вертикальная составляющая, равная

$$R_{BY} = R_B \cos 30^\circ$$

и имеющая плечо $3a$, а горизонтальная составляющая R_{BX} имеет нулевой момент относительно точки A.

Из третьего уравнения находим:

$$R_B = \frac{Q - 2F - \dfrac{M}{a}}{3\cos 30^\circ} \cong -50.0 \ H$$

Подставив полученный результат в первое и второе уравнения, получим:

$$X_A = \frac{Q - 2F - \dfrac{M}{a}}{3\cos 30^\circ} \sin 30^\circ \cong -25.0 \ H;$$

$$Y_A = \frac{2Q - F + \dfrac{M}{a}}{3} \cong 13.3 \ H$$

Полученные отрицательные значения R_B и X_A означают, что сила R_B и составляющая реакции X_A противоположны показанным на рис. 1.38 направлениям этих векторов.

Величина реакции

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} \cong 28.3\ H$$

ЗАДАЧА 5.

(см. пример из раздела 1.3.6).

Пример. Определить реакции внешних связей рамы, изображенной на рис.1. 43–1. Здесь q=*2 кН/м*, F=*2 кН*, a=*1 м*.

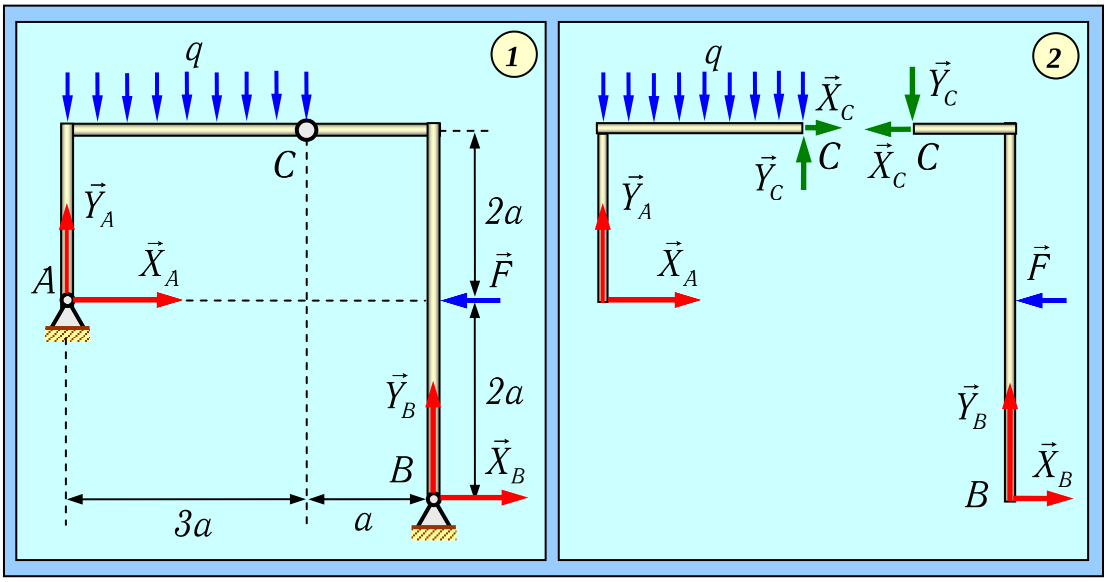


Рис. 1.39-1. Рама под внешними нагрузками: 1 – исходная конструкция; 2 – расчлененная конструкция

Конструкция состоит из двух частей AC и BC, сопряженных цилиндрическим шарниром C, и опирается шарнирами A и B. Неизвестных компонент внешних опорных реакций – четыре (X_A, Y_A, X_B, Y_B), а уравнений равновесия (1.32) – только три. Мысленно расчленим раму в шарнире C на звенья (рис. 1.49-2), введя внутренние реакции X_C , Y_C .

Всего стало 6 неизвестных компонент реакций (X_A, Y_A, X_B, Y_B, X^C, Y_C), при этом для каждого из двух звеньев AC и BC (рис. 1.49-2) можно составить по три уравнения равновесия (всего – 6). Таким образом, решая полученную систему из шести уравнений, можно найти все неизвестные. Если в задаче требуется определить только внешние реакции (X_A, Y_A, X_B, Y_B), можно не составлять все шесть уравнений равновесия, а использовать только четыре.

Из условия равновесия рамы в целом (рис. 1.39-1) получим:

$$\sum M_B\left(\vec{F}_k\right) = 0: \qquad Y_A \cdot 4 + X_A \cdot 2 - \left(q \cdot 3\right) \cdot 2.5 - F \cdot 2 = 0$$

Из условия равновесия части AC рамы (рис. 1.39-2) имеем:

$$\sum M_C\left(\vec{F}_k\right) = 0: \qquad Y_A \cdot 3 - X_A \cdot 2 - (q \cdot 3) \cdot 1.5 = 0$$

Решая эти уравнения совместно, находим:

$$X_A = 1.5\ кН; \quad Y_A = 4\ кН$$

Возвращаясь вновь к рассмотрению рамы в целом, определим:

$$\sum F_{kX} = 0: \quad X_A - F + X_B = 0;$$
$$\sum F_{kY} = 0: \quad Y_A - q \cdot 3 + Y_B = 0$$

Отсюда находим

$$X_B = 0.5\ кН; \quad Y_B = 2\ кН$$

ЗАДАЧА 6.

Рассмотрим схему, представленную на рис. 1.

Механическая система состоит из 2-х балок ВС и АС, соединённых между собой цилиндрическим шарниром С. В точке А
балка СА закрепляется в вертикальной стенке с помощью жёсткой заделки, в точке В – с помощью невесомого стержня BD. Система нагружена равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью q, парой сил с моментом M и силой P_1.

Необходимо определить реакции в точках А, В, С и характер изменения этих реакций в зависимости от направления действия силы P_1 (угла β). Весом балок и трением в шарнирах пренебречь.

Дано: q = 4,8 Н/м, P_1 = 1,5 Н, M = 1 Н·м, a = 1,2 м, $\alpha = 60^{\circ}$.

Определить: $R_{AX}(\beta)$, $R_{AY}(\beta)$, $R_A(\beta)$, $R_{CX}(\beta)$, $R_{CY}(\beta)$, $R_C(\beta)$, $R_B(\beta)$, $M_A(\beta)$.

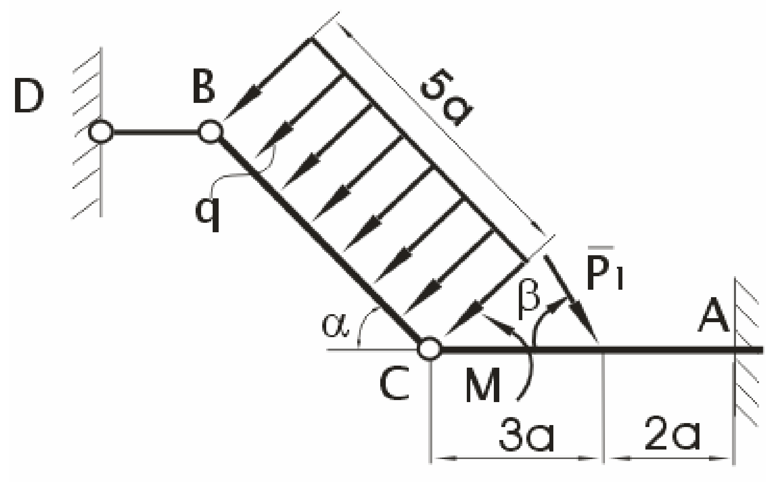


Рис. 1

Составление расчетной схемы и уравнений равновесия

Придерживаясь алгоритма решения задач статики, составим расчетную схему 1 для всей механической системы (рис.2).

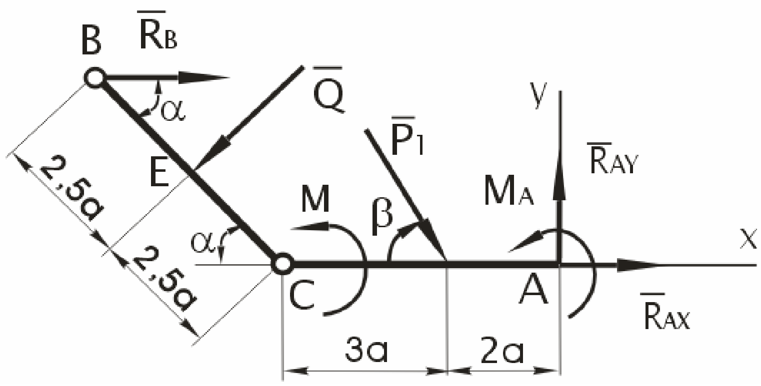


Рис. 2

Поскольку число неизвестных компонент реакций в этой схеме ($R_B, R_{AX,} R_{AY}, M_A$) больше числа независимых уравнений равновесия в плоской статике (их три), то расчленим систему по шарниру C и составим две новые расчётные схемы.

Расчётная схема 2 (балка BC) (рис. 3)

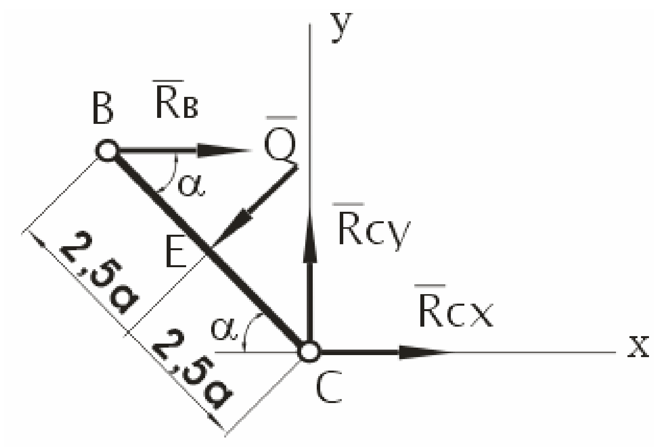


Рис. 3

Для балки BC:

- активные силы: равномерно распределённую нагрузку интенсивностью q заменяем сосредоточенной силой $\vec{Q}$ (модуль силы $\vec{Q}$ равен $Q = 5aq$, точка приложения силы $\vec{Q}$ – точка E);
- связи: поскольку BD – невесомый шарнирно опертый стержень, его реакция $\vec{R}_B$ направлена вдоль BD (рис.1), C – цилиндрический шарнир, составляющие реакции которого $\vec{R}_{CX}, \vec{R}_{CY}$ (рис.3).

Таким образом, на балку BC действует система сил $\vec{Q}, \vec{R}_B, \vec{R}_{CX}, \vec{R}_{CY}$ – произвольная плоская система сил, равновесие которой выполняется при следующих условиях:

$$\Sigma F_{KX} = 0,$$
$$\Sigma F_{KY} = 0,$$
$$\Sigma M_C(\vec{F}_k) = 0.$$

Эти уравнения равновесия для схемы 2 (см. рис. 3):

1) $\Sigma F_{KX} = R_B + R_{CX} - Q \cdot sin\ \alpha = 0,$
2) $\Sigma F_{KY} = R_{CY} - Q \cdot cos\ \alpha = 0,$
3) $\Sigma M_C(\vec{F}_k) = Q \cdot 2{,}5a - R_B \cdot 5a \cdot sin\ \alpha = 0.$

<u>Расчётная схема 3 (балка AC)</u> (рис. 4)

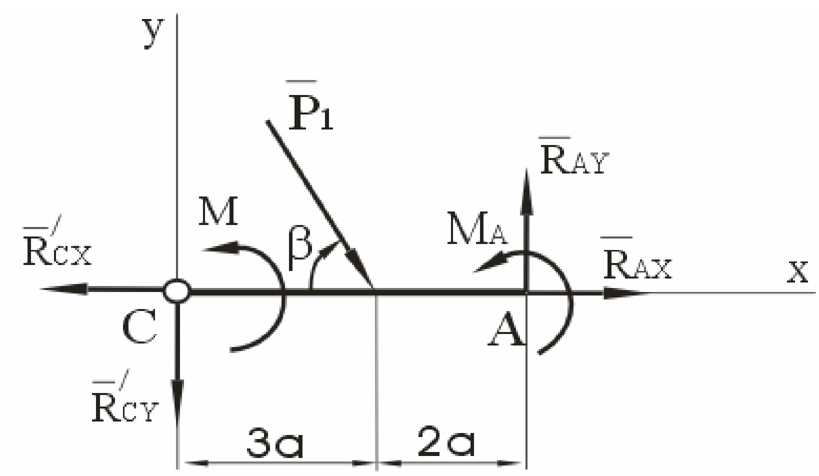


Рис. 4

Для балки AC:

- активные силовые факторы, действующие на балку AC: сила $\vec{P}_1$, момент M;
- связи: в точке A – жёсткая заделка, реакция состоит из силы реакции (направление её заранее неизвестно, поэтому силу раскладываем на составляющие $\vec{R}_{AX}, \vec{R}_{AY}$) и пары сил с моментом

M_A; в точке С – цилиндрический шарнир, составляющие реакции которого $\vec{R}'_{CX}, \vec{R}'_{CY}$ (рис. 4).

Уравнения равновесия для схемы 3:

4) $\Sigma F_{KX} = R_{AX} - R'_{CX} + P_1 \cdot cos\ \beta = 0$,

5) $\Sigma F_{KY} = R_{AY} - R'_{CY} - P_1 \cdot sin\ \beta = 0$,

6) $\Sigma\, M_C(\vec{F}_k) = M + M_A - (P_1 \cdot sin\ \beta)3a + R_{AY} \cdot 5a = 0$.

Решение системы уравнений

Перепишем систему уравнений, принимая во внимание, что $R'_{CX} = R_{CX}$ и $R'_{CY} = R_{CY}$ (модули этих сил равны).

$$\begin{cases} R_B + R_{CX} - Q \cdot sin\ \alpha = 0, & (1) \\ R_{CY} - Q \cdot cos\ \alpha = 0, & (2) \\ Q \cdot 2{,}5a - R_B \cdot 5a \cdot sin\ \alpha = 0, & (3) \\ R_{AX} - R_{CX} + P_1 \cdot cos\ \beta = 0, & (4) \\ R_{AY} - R_{CY} - P_1 \cdot sin\ \beta = 0, & (5) \\ M + M_A - P_1 \cdot 3a \cdot sin\ \beta + R_{AY} \cdot 5a = 0. & (6) \end{cases}$$

Решим систему методом подстановки.

Из уравнений (2) и (3) следует:

$$R_{CY} = Q \cdot cos\ \alpha, \qquad (7)$$

$$R_B = \frac{Q}{2 sin \alpha} \qquad (8)$$

Подставив R_{CY} в уравнение (5), получим: $R_{AY} - Q \cdot cos\ \alpha - P_1 \cdot sin\ \beta = 0$, откуда

$$R_{AY} = Q \cdot cos\ \alpha + P_1 \cdot sin\ \beta \qquad (9)$$

Далее из (6):

$M_A = P_1 \cdot 3a \cdot sin\ \beta - M - (Q \cdot cos\ \alpha + P_1 \cdot sin\ \beta)5a =$
$= - M - Q \cdot 5a \cdot cos\ \alpha - P_1 \cdot 2a \cdot sin\ \beta$

Окончательно:

$$M_A = - M - Q \cdot 5a \cdot cos\ \alpha - P_1 \cdot 2a \cdot sin\ \beta \qquad (10)$$

Из уравнения (1) следует:

$$R_{CX} = Q \cdot sin\ \alpha - R_B = Q \cdot sin\ \alpha - \frac{Q}{2 sin \alpha}$$

$$R_{CX} = Q(\sin\alpha - \frac{1}{2\sin\alpha}) \qquad (11)$$

Наконец, из уравнения (4) находим R_{AX}:

$$R_{AX} = R_{CX} - P_1 \cos\beta;$$

$$R_{AX} = Q(\sin\alpha - \frac{1}{2\sin\alpha}) - P_1 \cos\beta \qquad (12)$$

Полученные выражения (7)…(12) представляют собой расчётные формулы, у которых в правой части равенств – заданные параметры (с учётом $Q = 5q \cdot a$), а в левой – искомые величины.

Результаты расчётов

Подсчёт значений величин по полученным формулам можно проводить как на компьютере, так и вручную, на калькуляторе.

Для удобства формулы (7)…(12) запишем в численном виде, подставив исходные данные:

$Q = 5q \cdot a = 5 \cdot 4{,}8 \cdot 1{,}2 = 28{,}80;$ (Н)
$R_{AX} = 8{,}31 - 1{,}5\cos\beta;$ (Н)
$R_{AY} = 14{,}40 + 1{,}5\sin\beta;$ (Н)
$R_B = 16{,}63;$ (Н)
$R_{CX} = 8{,}31;$ (Н)
$R_{CY} = 14{,}40;$ (Н)
$M_A = -87{,}4 - 3{,}6\sin\beta.$ (Н·м)

Результаты расчётов сведены в таблицу 1, а их графическое изображение приведено на рис. 5.

Оценка величины реакции R_A и R_C приведена по формулам:

$$R_A = \sqrt{R_{AX}^2 + R_{AY}^2}, \quad R_C = \sqrt{R_{CX}^2 + R_{CY}^2};$$

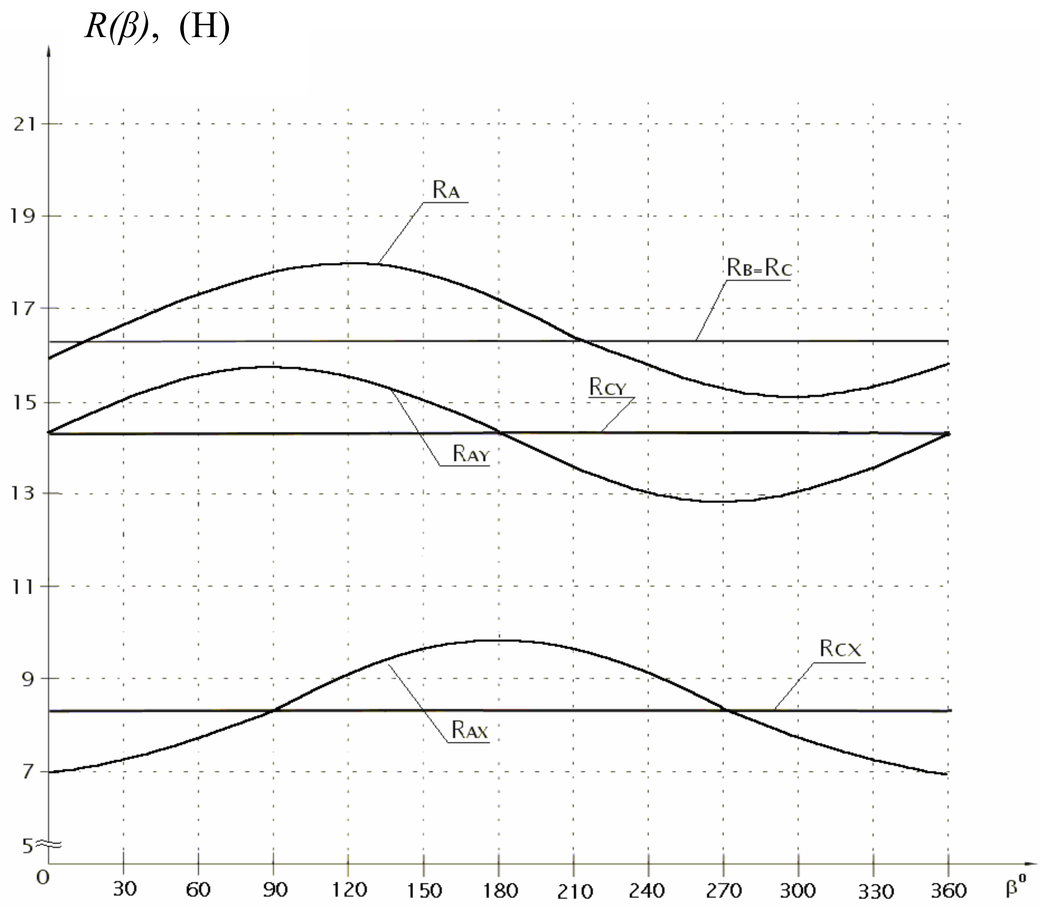
$$R_B = R_C;$$

Таблица 1

β^o	R_{AX} (Н)	R_{AY} (Н)	R_A (Н)	R_{CX} (Н)	R_{CY} (Н)	R_C (Н)	R_B (Н)	M_A (Н·м)
0	6,81	14,40	15,93	8,31	14,40	16,63	16,63	-87,40
30	7,01	15,15	16,69	8,31	14,40	16,63	16,63	-89,20
60	7,56	15,70	17,42	8,31	14,40	16,63	16,63	-90,52
90	8,31	15,90	17,94	8,31	14,40	16,63	16,63	-91,00
120	9,06	15,70	18,13	8,31	14,40	16,63	16,63	-90,52
150	9,61	15,15	17,94	8,31	14,40	16,63	16,63	-89,20

180	9,81	14,40	17,42	8,31	14,40	16,63	16,63	-87,40
210	9,61	13,65	16,69	8,31	14,40	16,63	16,63	-85,60
240	9,06	13,10	15,93	8,31	14,40	16,63	16,63	-84,28
270	8,31	12,90	15,34	8,31	14,40	16,63	16,63	-83,80
300	7,56	13,10	15,13	8,31	14,40	16,63	16,63	-84,28
330	7,01	13,65	15,35	8,31	14,40	16,63	16,63	-85,60
360	6,81	14,40	15,93	8,31	14,40	16,63	16,63	-87,40

Зависимость сил реакций и момента в заделке от угла β



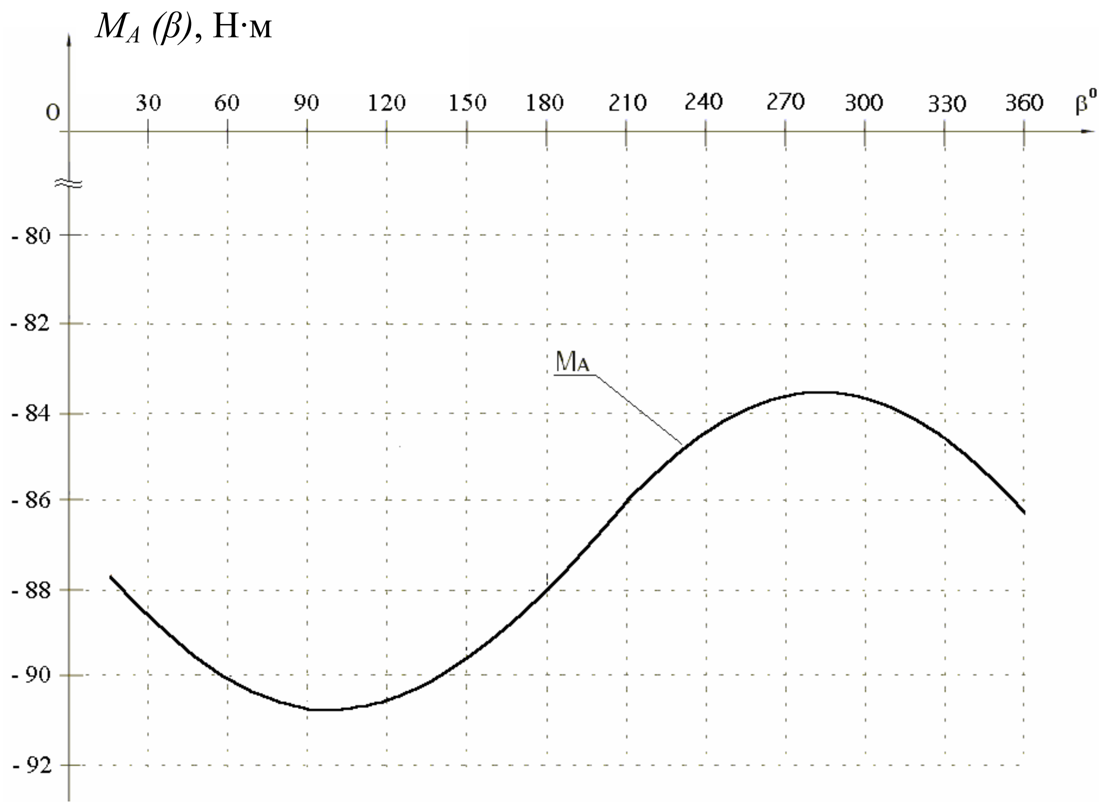


Рис. 5

Тема 4

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

ЗАДАЧА 7.

По данным уравнениям движения точки М установить вид ее траектории и для момента времени t_1 найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории в данной точке.

1. $x = 3t - 5$ (м) $y = 4 - 2t$ (м) $t_1 = 1$ (с).

Решение задачи выполним в следующей последовательности:

а) Установим вид уравнения, связывающего функции x и y, по которому судят о траектории движения точки. Выразим из одного уравнения t и подставим в другое. Из первого уравнения:

$$t = \frac{1}{3}(x+5),$$

после подстановки во второе:

$$y = 4 - 2\frac{1}{3}(x+5) = 4 - \frac{2}{3}x - \frac{10}{3} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x,$$

или окончательно:

$$y = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x.$$

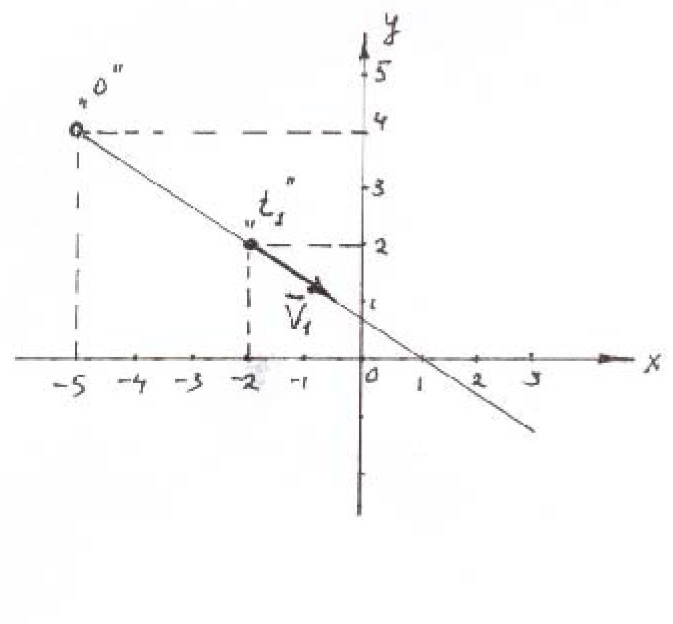


Рис.8

Это уравнение описывает прямую, проходящую через точки с координатами (0,2/3) и (1,0) (рис.8). Начало движения соответствует моменту времени $t_0 = 0$. Используя исходные функции, найдем положение начальной точки:

$$x_0 = 3t_0 - 5 = 3 \cdot 0 - 5 = -5, \quad y_0 = 4 - 2t_0 = 4 - 2 \cdot 0 = 4.$$

Материальная точка начнет свое движение из геометрической точки с координатами $x_0 = -5$ (м), $y_0 = 4$ (м). Исходя из вида заданных координатных функций, при увеличении параметра t значение x будет возрастать, а y - убывать, т.е. материальная точка будет перемещаться направо и вниз вдоль прямой. Таким образом, траектория движения представляет собой полупрямую $y = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x$ с началом в точке (-5,4).

b) Положение точки в момент времени t_1 определим путем подстановки t_1 в исходные зависимости:

$$x_1 = 3t_1 - 5 = 3 \cdot 1 - 5 = -2 \text{ (м)}, \quad y_1 = 4 - 2t_1 = 4 - 2 \cdot 1 = 2 \text{ (м)}.$$

c) Определим скорость точки.

Проекции вектора скорости определяются производными по времени от координатных функций:

$$V_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d(3t-5)}{dt} = 3\,(м/с),$$

$$V_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{d(4-2t)}{dt} = -2\,(м/с)$$

Величина вектора скорости по своим проекциям определяется по теореме Пифагора:

$$V = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2}} = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}61\,(м/с) = const.$$

Полученный результат не содержит параметра t, т.е. скорость - есть величина постоянная и материальная точка движется вдоль прямой равномерно ($V_1 = V$).

d) Определим полное ускорение точки.

Проекции вектора ускорения определяются производными по времени от функций проекций вектора скорости:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d(2)}{dt} = 0\,(м/с^2), \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d(-2)}{dt} = 0\,(м/с).$$

Величина ускорения по своим проекциям определяется по теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2}} = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0\,(м/с^2).$$

Как и ожидалось для равномерного движения вдоль прямой, полное ускорение точки равно нулю.

e) Определим касательное ускорение точки.

Оно вычисляется как производная от величины скорости:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d(const)}{dt} = 0\ (м/с^2).$$

f) Определим нормальное ускорение точки.
Его вычисление проведем в соответствии с формулой (2.29):

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau{}^2} = \sqrt{0^2 - 0^2} = 0\ (м/с^2)$$

g) Определим радиус кривизны траектории в данной точке.
Используя формулу (2.28), получим:

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{(3,61)^2}{0} \to \infty .$$

Как и ожидалось, радиус кривизны у прямой бесконечно большой (кривизна равна нулю).

Ответ:

- траектория движения представляет собой полупрямую $y = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x$ с началом в точке (-5,4) (рис.8);
- положение точки для момента времени t_1 определяется координатами $x_1 = -2$ (м), $y_1 = 2$ (м);
- скорость точки для момента времени t_1 равна $V_1 \approx 3,61\ (м/с)$;
- полное ускорение точки для момента времени t_1 равно $a_1 = 0\ (м/с^2)$;
- касательное ускорение точки для момента времени t_1 равно $a_1^\tau = 0\ (м/с^2)$;
- нормальное ускорение точки для момента времени t_1 равно $a_1^n = 0\ (м/с^2)$;
- радиус кривизны траектории в данной точке стремится к бесконечности $\rho_1 \to \infty$.

2. $x = 2t$ (м) $y = 8t^2$ (м) $t_1 = 0,5$ (с).

Решение:

a) Установим вид уравнения, связывающего функции x и y, по которому судят о траектории движения точки. Из первого уравнения:

$$t = \frac{x}{2},$$

после подстановки во второе:

$$y = 8(\frac{x}{2})^2 = 2x^2,$$

или окончательно:

$$y = 2x^2.$$

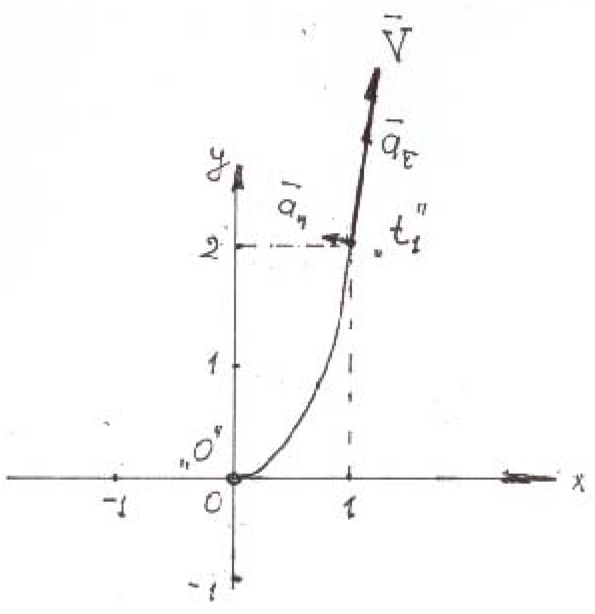


Рис.9

Это уравнение описывает параболу с вершиной в начале координат (рис.9). Начало движения соответствует моменту времени t_0 = 0. Используя исходные функции, найдем положение начальной точки:

$$x_0 = 2t_0 = 0 \text{ (м)}, \qquad y_0 = 8t_0^2 = 0 \text{ (м)}.$$

Материальная точка начнет свое движение из геометрической точки с координатами x_0 = 0 (м), y_0 = 0 (м). Исходя из вида заданных координатных функций, при увеличении параметра t значения x и y будут возрастать, т.е. материальная точка будет перемещаться направо и вверх. Таким образом, траектория движения представляет собой правую ветвь параболы $y = 2x^2$ с началом в ее вершине (0,0).

b) Положение точки в момент времени t_1 определим путем подстановки t_1 в исходные зависимости:

$$x_1 = 2t_1 = 2\cdot 0{,}5 = 1 \text{ (м)}, \qquad y_1 = 8\cdot 0{,}5^2 = 2 \text{ (м)}.$$

c) Скорость точки.

Проекции вектора скорости:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(2t)}{dt} = 2\,(м/с),$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(8t^2)}{dt} = 16t\,(м/с)$$

Величина вектора скорости:

$$V = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2}} = \sqrt{2^2 + (16t)^2} = \sqrt{4 + 256t^2}\,\,(м/с).$$

Значение скорости в момент времени t_1:

$$V_1 = \sqrt{4+256t_1^{\,2}} = \sqrt{4+256(0,5)^2} = \sqrt{68} \approx 8,25\,(м/с)$$

d) Полное ускорение точки:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d(2)}{dt} = 0\,(м/с^2), \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d(16t)}{dt} = 16\,(м/с)\,.$$

Величина ускорения по своим проекциям определяется по теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2}} = \sqrt{0^2+16^2} = 16\,(м/с^2) = const = a_1\,.$$

e) Касательное ускорение точки:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d(\sqrt{4+256t^2}\,)}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{4+256t^2}}(2\cdot 256t) = \frac{256t}{\sqrt{4+256t^2}}\,(м/с^2)$$

Для момента времени t_1:

$$a_1^\tau = \frac{256t_1}{\sqrt{4+256t_1^{\,2}}} = \frac{256\cdot 0,5}{\sqrt{4+256(0,5)^2}} = \frac{128}{\sqrt{68}} \approx 15,52\,(м/с^2)$$

f) Нормальное ускорение точки.

Его вычисление проведем в соответствии с формулой (2.29):

$$a_1^n = \sqrt{a_1^{\,2} - a_1^{\tau\,2}} = \sqrt{16^2 - 15,52^2} \approx 3,88\,(м/с^2)$$

g) Радиус кривизны траектории в данной точке:

$$\rho_1 = \frac{V_1^{\,2}}{a_1^n} \approx \frac{(6,25)^2}{3,88} \approx 17,53\,(м)\,.$$

<u>Ответ</u>:

- траектория движения представляет собой правую ветвь параболы $y = 2x^2$ с вершиной в начале координат (рис.9);
- положение точки для момента времени t_1 определяется координатами $x_1 = 1$ (м) , $y_1 = 2$ (м);
- скорость точки для момента времени t_1 равна $V_1 \approx 8,25\,(м/с)$;
- полное ускорение точки для момента времени t_1 равно $a_1 = 16\,(м/с^2)$;
- касательное ускорение точки для момента времени t_1 равно $a_1^\tau \approx 15,52\,(м/с^2)$;
- нормальное ускорение точки для момента времени t_1 равно $a_1^n \approx 3,88\,(м/с^2)$;
- радиус кривизны траектории в данной точке $\rho_1 \approx 17,53\,(м)$.

3. $x = 5\sin 10t\,(см), \quad y = 3\cos 10t\,(см), \quad t_1 = \dfrac{\pi}{2}\,(с)$

<u>Решение</u>:

а) Установим вид уравнения, связывающего функции x и y, по которому судят о траектории движения точки. Из первого уравнения:

$$sin 10t = \frac{x}{5}.$$

Из второго:

$$cos 10t = \frac{y}{3},$$

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством ($sin^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1$), приняв $\alpha = 10t$:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

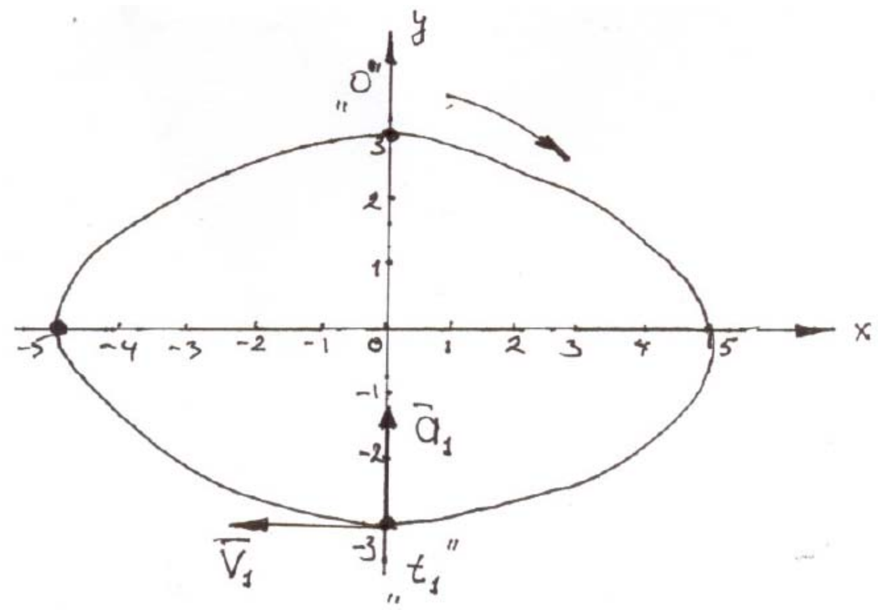


Рис.10

Это уравнение описывает эллипс с полуосями, по координатам x и y, соответственно равными 5 см и 3 см. Центр эллипса совпадает с началом координат (рис.10). Начало движения соответствует моменту времени $t_0 = 0$. Используя исходные функции, найдем положение начальной точки:

$$x_0 = 5 sin 0 = 0 \, (см), \quad y_0 = 3 cos 0 = 3 \, (см).$$

Материальная точка начнет свое движение из геометрической точки с координатами $x_0 = 0$ (см), $y_0 = 3$ (см). При увеличении параметра t в первой четверти периода исходных тригонометрических функций значение x будет возрастать, а y – убывать, т.е. материальная точка будет перемещаться по эллипсу направо и вниз, или двигаться по ходу часовой стрелки. Таким образом, траектория движения представляет собой эллипс $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ с начальной точкой движения с координатами (0,3) по ходу часовой стрелки.

b) Положение точки в момент времени t_1 определим путем подстановки t_1 в исходные зависимости:

$$x_1 = 5\sin 10\frac{\pi}{2} = 5\sin 5\pi = 0\ (см),$$

$$y_1 = 3\cos 10\frac{\pi}{2} = 3\cos 5\pi = -3\ (см).$$

c) Скорость точки.

Проекции вектора скорости:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(5\sin 10t)}{dt} = 5\cdot 10\cos 10t = 50\cos 10t\ (см/с),$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(3\cos 10t)}{dt} = -3\cdot 10\sin 10t = -30\sin 10t\ (см/с)$$

Величина вектора скорости:

$$V = \sqrt{V_x{}^2 + V_y{}^2} = \sqrt{(50\cos 10t)^2 + (-30\sin 10t)^2} =$$
$$= \sqrt{2500\cos^2 10t + 900\sin^2 10t} = .$$
$$= \sqrt{1600\cos^2 10t + 900} = 10\sqrt{16\cos^2 10t + 9}\ (см/с)$$

Значение скорости в момент времени t_1:

$$V_1 = 10\sqrt{16\cos^2 10t_1 + 9} = 10\sqrt{16\cos^2 5\pi + 9} = 10\sqrt{25} = 50\ (см/с)$$

d) Полное ускорение точки:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d(50\cos 10t)}{dt} = -500\sin 10t\ (см/с^2),$$
$$.$$
$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d(-30\sin 10t)}{dt} = -300\cos 10t\ (см/с)$$

Величина ускорения по своим проекциям определяется по теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2} = \sqrt{(-500\sin 10t)^2 + (-300\cos 10t)^2} =$$
$$.$$
$$= 100\sqrt{25\sin^2 10t + 9\cos^2 10t}\ (м/с^2)$$

Для момента времени t_1:

$$a_1 = 100\sqrt{25\sin^2 10t_1 + 9\cos^2 10t_1} = 100\sqrt{25\sin^2 5\pi + 9\cos^2 5\pi} =$$
$$= 100\sqrt{25\cdot 0 + 9\cdot 1} = 300\ (см/с^2)$$

e) Касательное ускорение точки:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d(10\sqrt{16\cos^2 10t + 9})}{dt} =$$

$$= \frac{10}{2\sqrt{16\cos^2 10t + 9}}(-16 \cdot 2\sin 10t) = -\frac{160\sin 10t}{\sqrt{16\cos^2 10t + 9}}\ (см/с^2)$$

Для момента времени t_1:

$$a_1^\tau = -\frac{160\sin 10t_1}{\sqrt{16\cos^2 10t_1 + 9}} = \frac{160 \cdot \sin 5\pi}{\sqrt{16\cos^2 5\pi + 9}} = 0\ (см/с^2)$$

f) Нормальное ускорение точки. :

$$a_1^n = \sqrt{a_1{}^2 - a_1^{\tau 2}} = \sqrt{300^2 - 0^2} = 300\ (см/с^2)$$

g) Радиус кривизны траектории в данной точке:

$$\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_1^n} = \frac{(50)^2}{300} = \frac{2500}{300} \approx 8,33\ (см).$$

Ответ:

- траектория движения представляет собой эллипс $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ с начальной точкой движения с координатами (0,3) в направление по ходу часовой стрелки. (рис.10);
- положение точки для момента времени t_1 определяется координатами x_1 = 0 (см) , y_1 = -3 (см);
- скорость точки для момента времени t_1 равна $V_1 = 50\ (см/с)$;
- полное ускорение точки для момента времени t_1 равно $a_1 = 300\ (см/с^2)$;
- касательное ускорение точки для момента времени t_1 равно $a_1^\tau = 0\ (см/с^2)$;
- нормальное ускорение точки для момента времени t_1 равно $a_1^n = 300\ (см/с^2)$;
- радиус кривизны траектории в данной точке $\rho_1 \approx 8,33\ (см)$.

4. $x = 5 - 3\sin\frac{\pi}{2}t\ (см),\quad y = -2 + 3\cos\frac{\pi}{2}t\ (см),\quad t_1 = 1\ (с)$

Решение:

a) Установим вид уравнения, связывающего функции x и y, по которому судят о траектории движения точки. Из первого уравнения:

$$\sin\frac{\pi}{2}t = \frac{5 - x}{3}.$$

Из второго:

$$\cos\frac{\pi}{2}t = \frac{y + 2}{3},$$

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством ($sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$), приняв $\alpha = \frac{\pi}{2}t$:

.

$$\frac{(5-x)^2}{3^2} + \frac{(y+2)^2}{3^2} = 1,$$

или $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 3^2$

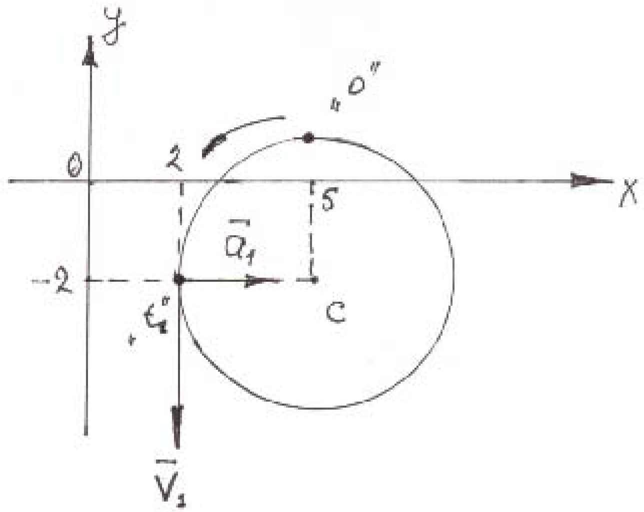


Рис.11

Это уравнение описывает окружность с радиусом 3 см. Центр окружности располагается в точке C с координатами (5,-2). (рис.11). Начало движения соответствует моменту времени $t_0 = 0$. Используя исходные функции, найдем положение начальной точки:

$$x_0 = 5 - 3sin\frac{\pi}{2}t_0 = 5 - 3sin0 = 5\ (см),$$

$$y_0 = -2 + 3cos\frac{\pi}{2}t_0 = -2 + 3cos0 = 1\ (см)$$

Материальная точка начнет свое движение из геометрической точки с координатами x_0 = 5 (см), y_0 = 1 (см). При увеличении параметра t в первой четверти периода исходных тригонометрических функций значения x и y будут убывать, т.е. материальная точка будет перемещаться по окружности налево и вниз, или двигаться протии хода часовой стрелки.

b) Положение точки в момент времени t_1 определим путем подстановки t_1 в исходные зависимости:

$$x_1 = 5 - 3sin\frac{\pi}{2}t_1 = 5 - 3sin\frac{\pi}{2} = 2\,(см),$$

$$y_1 = -2 + 3cos\frac{\pi}{2}t_1 = -2 + 3cos\frac{\pi}{2} = -2\,(см).$$

c) Скорость точки.

Проекции вектора скорости:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(5 - 3sin\frac{\pi}{2}t)}{dt} = -3\frac{\pi}{2}cos\frac{\pi}{2}t = -\frac{3\pi}{2}cos\frac{\pi}{2}t\,(см/с),$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(-2 + 3cos\frac{\pi}{2}t)}{dt} = -3\frac{\pi}{2}10\,sin\frac{\pi}{2}t = -\frac{3\pi}{2}sin\frac{\pi}{2}t\,(см/с)$$

Величина вектора скорости:

$$V = \sqrt{V_x{}^2 + V_y{}^2} = \sqrt{(-\frac{3\pi}{2}cos\frac{\pi}{2}t)^2 + (-\frac{3\pi}{2}sin\frac{\pi}{2}t)^2} = \frac{3\pi}{2}\,(см/с) = const = V_1.$$

d) Полное ускорение точки:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d(-\frac{3\pi}{2}cos\frac{\pi}{2}t)}{dt} = \frac{3\pi^2}{4}sin\frac{\pi}{2}t\,(см/с^2),$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d(-30\,sin10t)}{dt} = -\frac{3\pi^2}{4}cos\frac{\pi}{2}t\,(см/с).$$

Величина ускорения по своим проекциям определяется по теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2} = \sqrt{(\frac{3\pi^2}{4}sin\frac{\pi}{2}t)^2 + (-\frac{3\pi^2}{4}cos\frac{\pi}{2}t)^2} = \frac{3\pi^2}{4}\,(см/с^2) = const = a_1.$$

e) Касательное ускорение точки:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d(\frac{3\pi}{2})}{dt} = 0\,(см/с^2) = a_1^\tau$$

f) Нормальное ускорение точки:

$$a_n = a_1^n = \sqrt{a_1{}^2 - a_1^{\tau 2}} = \sqrt{(\frac{3\pi^2}{4})^2 - 0^2} = \frac{3\pi^2}{4}\,(см/с^2)$$

g) Как и ожидалось, радиус кривизны траектории в данной точке равен радиусу окружности:

$$\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_1^n} = \frac{(\frac{3\pi}{2})^2}{(\frac{3\pi^2}{4})} = 3\,(см).$$

Ответ:

- траектория движения представляет собой окружность $(x-5)^2+(y+2)^2=3^2$ с радиусом 3 см и центром окружности в точке С с координатами (5, -2). Координаты начальной точки - (5,1), направление движения против хода часовой стрелки. (рис.11);
- положение точки для момента времени t_1 определяется координатами x_1 = 2 (см) , y_1 = -2 (см);
- скорость точки для момента времени t_1 равна $V_1=\frac{3\pi}{2}\approx 4{,}71\,(см/с)$;
- полное ускорение точки для момента времени t_1 равно $a_1=\frac{3\pi^2}{4}\approx 7{,}40\,(см/с^2)$;
- касательное ускорение точки для момента времени t_1 равно $a_1^\tau=0\,(см/с^2)$;
- нормальное ускорение точки для момента времени t_1 равно $a_1^n=\frac{3\pi^2}{4}\approx 7{,}40\,(см/с^2)$;
- радиус кривизны траектории $\rho_1=\rho=3\,(см)$.

Тема 4 и 5

КИНЕМАТИКА системы тел

(**ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ**)

ЗАДАЧА 8.

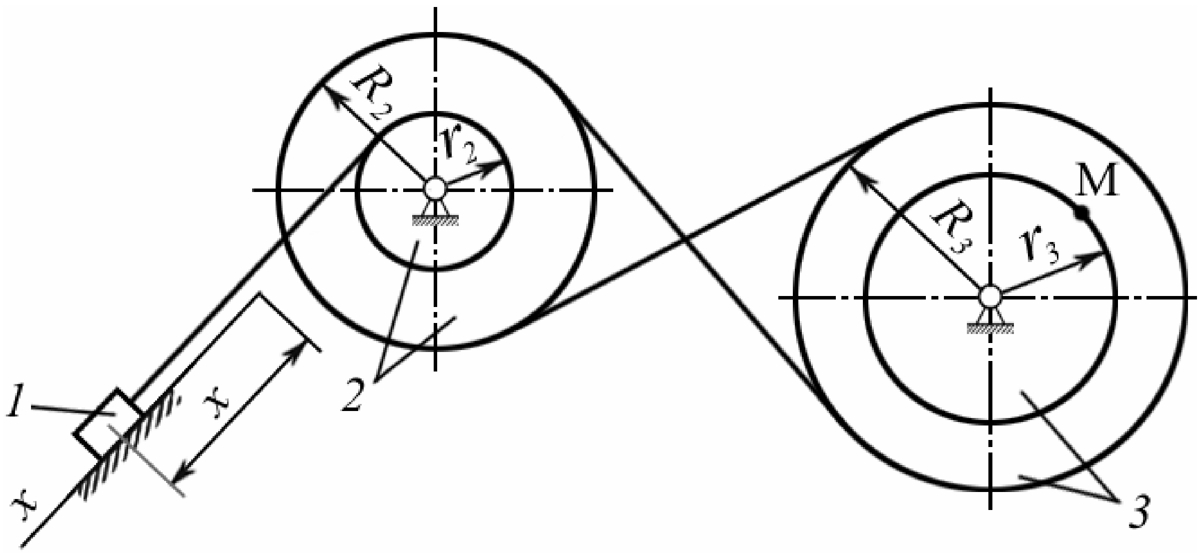


Рис.1. Схема механизма

ДАНО. Заданный механизм представлен на рис.1, уравнение движения груза 1 описывается выражением:

$$x = C_2 t^2 + C_1 t + C_2 \,.$$

В начальный момент времени $t_0 = 0$ начальная координата груза x_0=0,14м, а начальная скорость V_0 = 0,05м/с .

В момент времени $t = t_2 = 2$с координата груза x_2 = 1,68м.

R_2 = 0,50м; r_2 = 0,25м; R_3 = 0,65м; r_3 = 0,40м.

ОПРЕДЕЛИТЬ:

- уравнение движения груза 1;
- скорость и ускорение груза 1. в момент времени $t = t_1$;
- угловые скорости и угловые ускорения шкивов 2 и 3 в момент времени $t = t_1$;
- скорость и ускорение точки М шкива 3 при $t = t_1$.

РЕШЕНИЕ.

ДАНО: $x = C_2 t^2 + C_1 t + C_0$; $t_0 = 0$; $x_0 = 0{,}14$ м; $\dot{x}_0 = V_0 = 0{,}05$ м/с;

$t_2 = 2$ с; $x_2 = 1{,}68$ м; $t_1 = 1$с;

$R_2 = 0{,}50$м; $r_2 = 0{,}25$м; $R_3 = 0{,}65$м; $r_3 = 0{,}40$м

ОПРЕДЕЛИТЬ: $x = x(t)$; V_1; a_1; ω_2; ε_2; ω_3; ε_3; $V_М$; $a_М$.

Итак:

- груз 1 движется поступательно по наклонной плоскости вниз;
- шкив 2 вращается вокруг неподвижной оси O_2z_2 (рис.2);
- шкив 3 вращается вокруг неподвижной оси O_3z_3 (рис.2).

Уравнение движения груза 1

$$x = C_2 t^2 + C_1 t + C_0 \qquad (1)$$

Скорость груза 1 определим, продифференцировав закон движения по времени:

$$V = \dot{x} = 2 \cdot C_2 t + C_1 \qquad (2)$$

Касательное ускорение груза 1 определим, получив вторую производную от уравнения (2):

$$a_\tau = \dot{V} = \ddot{x} = 2 \cdot C_2 = \text{const} \qquad (3)$$

Таким образом**,** ускорение не зависит от времени t. Следовательно, ускорение есть величина постоянная, а движение груза - равноускоренное. При движении по прямой нормальное ускорение отсутствует (a_n=0), поэтому полное ускорение груза определяется только касательной составляющей (a=a_τ).

Для определения постоянных коэффициентов подставим начальные условия в уравнения (1) и (2).

$t_0 = 0$; $x_0 = 0{,}14$ м; $\dot{x}_0 = V_0 = 0{,}05$ м/с;

$x_0 = C_2 \cdot 0 + C_1 \cdot 0 + C_0$, откуда $C_0 = x_0$

$\dot{x}_0 = 2 \cdot C_2 \cdot 0 + C_1$, откуда $C_1 = \dot{x}_0$

Подставляя числовые значения, находим коэффициенты

$C_0 = 0{,}14$ м, $C_1 = 0{,}05$ м/с;

Для определения коэффициента C_2 используем данные для момента времени t_2, подставляя их в уравнение (1):

при $t_2 = 2$ с, $x_2 = 1{,}68$ м,

$$x_2 = C_2 \cdot t_2^2 + C_1 \cdot t_2 + C_0,$$

откуда
$$C_2 = \frac{x_2 - C_1 \cdot t_2 - C_0}{t_2^{\,2}}$$

Подставляя числовые значения, получаем:

$$C_2 = \frac{1{,}68 - 0{,}05 \cdot 2 - 0{,}14}{2^2} = 0{,}36 \quad м/с^2$$

Таким образом, уравнение движения груза 1:

$$x = 0{,}36 t_2^2 + 0{,}05 t_2 + 0{,}14 \tag{4}$$

Скорость груза 1:

$$V = \dot{x} = 0{,}72t + 0{,}05 \tag{5}$$

Касательное ускорение груза 1

$$a_\tau = \ddot{x} = 0{,}72 \text{ м/с}^2 = \text{const} \tag{6}$$

Значение координаты, скорости и ускорения груза 1 в заданный момент времени $t = t_1 = 1$(с) найдем, подставив это время в уравнение (4), (5), (6).

$$x_1 = 0{,}36 t_1^2 + 0{,}05 t_1 + 0{,}14$$

$$V_1 = 0{,}72 t_1 + 0{,}05$$

$$a_1^\tau = 0{,}72 = \text{const}$$

Подставляя числовые значения, находим

$$x_1 = 0{,}36 \cdot 1^2 + 0{,}05 \cdot 1 + 0{,}14 = 0{,}55 \text{ м}$$

$$V_1 = 0{,}72 \cdot 1 + 0{,}05 = 0{,}77 \text{ м/с}$$

$$a_1^\tau = 0{,}72 = \text{const} = 0{,}72 \text{ м/с}^2$$

Направления показаны на рисунке 2. Векторы скорости и ускорения направлены по оси Ox, (V_1 и a_1^τ положительны).

Так как нить нерастяжимая**,** то

$$V_E = V_1 = 0{,}77 \text{ м/с}$$

$$a_E^\tau = a_1 = 0{,}72 \text{ м/с}^2$$

Из кинематики вращения тела 2 вокруг неподвижной оси O_2z_2:

угловая скорость

$$\omega_2 = \frac{V_E}{EO_2},$$

где EO_2 – кратчайшее расстояние от точки до оси вращения;

$$\omega_2 = \frac{V_1}{r_2} = \frac{0,77}{0,25} = 3,08 \quad рад/с$$

Направление угловой скорости ω_2 соответствует направлению вектора скорости в т. F , т.е. против хода часовой стрелки (рис.2);

Угловое ускорение:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_E^\tau}{EO_2} = \frac{a_E^\tau}{r_2} = \frac{0,72}{0,25} = 2,88 \text{ рад/с}^2$$

Направление углового ускорения ε_2 соответствует направлению вектора касательного ускорения $\overline{a_E}^\tau$ (против хода часовой стрелки) (рис.2);

Модуль скорости точки К

$V_К = \omega_2 \cdot КО_2$

где $КО_2$ - кратчайшее расстояние от точки до оси вращения $O_2 z_2$.

$V_К = \omega_2 \cdot R_2 = 3,08 \cdot 0,50 = 1,54$ м/с

Направлен вектор скорости $\overline{V_К}$ перпендикулярно к кратчайшему расстоянию $КО_2$ и соответствует направлению угловой скорости ω_2 (рис.2).

Касательное ускорение точки К

$a_K^\tau = \varepsilon_2 \cdot КО_2 = \varepsilon_2 \cdot R_2$

$a_K^\tau = 2,88 \cdot 0,50 = 1,44$ м/с^2

Направлен вектор касательного ускорения точки К перпендикулярно кратчайшему расстоянию от точки К до оси вращения, т. е. $\overline{a_K}^\tau \perp КО_2$ и соответствует направлению углового ускорения ε_2.

Так как ремень нерастяжимый, то

$V_N = V_К = 1,54$ м/с

$a_N^\tau = a_K^\tau = 1,44$ м/с^2

Направления векторов $\overline{V_N}$ и $\overline{a_N}^\tau$ показаны на рис.2.

Из кинематики вращения тела 3 вокруг неподвижной оси вращения $O_3 z_3$: угловая скорость

$$\omega_3 = \frac{V_N}{NO_3},$$

где NO_3 - кратчайшее расстояние от точки N до оси вращения O_3z_3 .

$$\omega_3 = \frac{V_N}{R_3} = \frac{1,54}{0,65} = 2,37 \ \ рад/с$$

Направлена угловая скорость по часовой стрелке и соответствует направлению вектора скорости $\overline{V}_N$ (рис. 2)

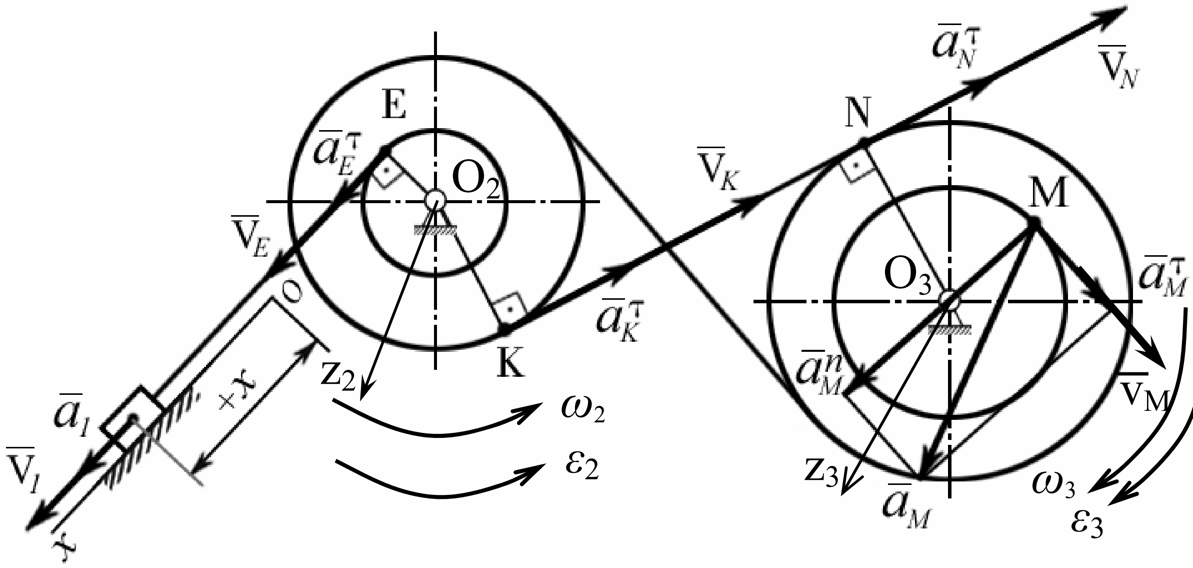


Рис. 2.

Угловое ускорение

$$\varepsilon_3 = \frac{a_N^\tau}{NO_2} = \frac{1,44}{0,65} = 2,22 \quad рад/с^2$$

Направление углового ускорения ε_3 соответствует направлению вектора касательного ускорения a_N^τ (по часовой стрелке) (рис.2).

Скорость точки М:

$V_М = \omega_3 \cdot MO_3$

где MO_3 - кратчайшее расстояние от точки М до оси вращения O_3z_3.

$V_М = \omega_3 \cdot r_3$ =2,37·0,40 = 0,95 м/с

Направлен вектор скорости точки М перпендикулярно кратчайшему расстоянию MO_3 и соответствует направлению угловой скорости ω_3 (рис.2).

Касательное ускорение точки М:

$a_М^{\tau} = \varepsilon_3 \cdot МО_3$

$a_М^{\tau} = \varepsilon_3 \cdot r_3 = 2{,}22 \cdot 0{,}40 = 0{,}89$ м/с^2

Направлен вектор касательного ускорения перпендикулярно кратчайшему расстоянию от точки до оси вращения, т.е. $\overline{a_М^{\tau}} \perp МО_3$, соответствует направлению углового ускорения ε_3 (рис.2).

Нормальное ускорение точки М:

$a_М^{n} = \omega_3^2 \cdot МО_3$

$a_М^{n} = \omega_3^2 \cdot r_3 = 2{,}37^2 \cdot 0{,}40 = 2{,}25$ м/с^2

Направлен вектор нормального ускорения по радиусу $МО_3$ в сторону оси вращения (рис.2).

Полное ускорение точки М есть векторная сумма двух ускорений $\overline{a_М} = \overline{a_М^{n}} + \overline{a_М^{\tau}}$

Его величина:

$a_М = \sqrt{(a_М^n)^2 + (a_М^{\tau})^2}$; $a_М = \sqrt{2{,}25^2 + 0{,}89^2} = 2{,}42$ м/с^2

Направление вектора $\overline{a_М}$ показано на расчетной схеме (рис.2) диагональю прямоугольника, построенного на векторах нормального и касательного ускорения как на сторонах.

Так как вектор ускорения a_1 и вектор скорости V_1 груза 1 направлены в одну сторону и при этом ускорение есть величина постоянная, то груз 1, тела 2 и 3, а вместе с ними и точка М совершают равноускоренное движение.

<u>ОТВЕТ.</u> $V_М = 0{,}95$ м/с $a_М = 2{,}42$ м/с^2

V_1 м/с	a_1 м/с^2	ω_2 рад/с	ε_3 рад/с^2	ω_3 рад/с	ε_3 рад/с^2
0,77	0,72	3,08	2,88	2,37	2,22

Практическое занятие 2

Практическое занятие 2 состоит из 1 блока:

- в 1 блоке изучается кинематика точки.

1 блок

Теоретическая часть:

– Лекция 2 (тема 3).

Практическая часть:

ЗАДАЧА 7.

По данным уравнениям движения точки М установить вид ее траектории и для момента времени t_1 найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории в данной точке.

5. $x = 3t - 5$ (м) $y = 4 - 2t$ (м) $t_1 = 1$ (с).

Решение задачи выполним в следующей последовательности:

а) Установим вид уравнения, связывающего функции x и y, по которому судят о траектории движения точки. Выразим из одного уравнения t и подставим в другое. Из первого уравнения:

$$t = \frac{1}{3}(x+5),$$

после подстановки во второе:

$$y = 4 - 2\frac{1}{3}(x+5) = 4 - \frac{2}{3}x - \frac{10}{3} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x,$$

или окончательно:

$$y = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x.$$

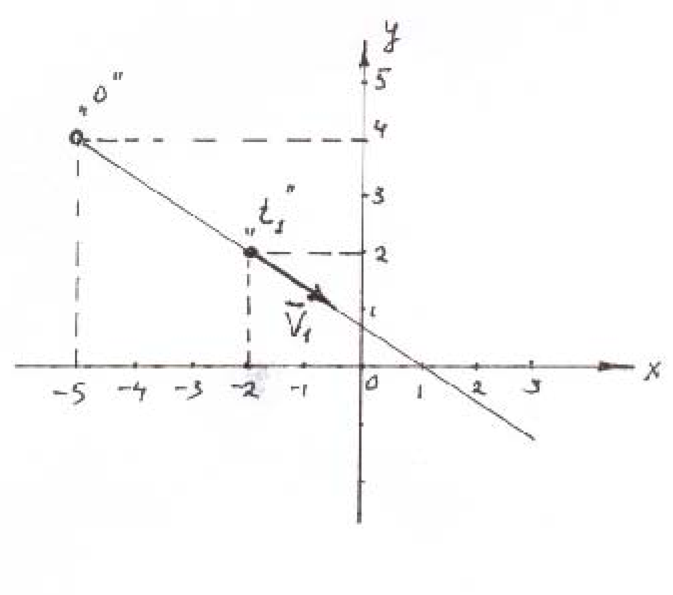


Рис.8

Это уравнение описывает прямую, проходящую через точки с координатами (0,2/3) и (1,0) (рис.8). Начало движения соответствует моменту времени $t_0 = 0$. Используя исходные функции, найдем положение начальной точки:

$$x_0 = 3t_0 - 5 = 3\cdot 0 - 5 = -5, \quad y_0 = 4 - 2t_0 = 4 - 2\cdot 0 = 4.$$

Материальная точка начнет свое движение из геометрической точки с координатами $x_0 = -5$ (м), $y_0 = 4$ (м). Исходя из вида заданных координатных функций, при увеличении параметра t значение x будет возрастать, а y - убывать, т.е. материальная точка будет перемещаться направо и вниз вдоль прямой. Таким образом, траектория движения представляет собой полупрямую $y = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x$ с началом в точке (-5,4).

b) Положение точки в момент времени t_1 определим путем подстановки t_1 в исходные зависимости:

$$x_1 = 3t_1 - 5 = 3\cdot 1 - 5 = -2 \text{ (м)}, \quad y_1 = 4 - 2t_1 = 4 - 2\cdot 1 = 2 \text{ (м)}.$$

c) Определим скорость точки.

Проекции вектора скорости определяются производными по времени от координатных функций:

$$V_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d(3t-5)}{dt} = 3\,(м/с),$$

$$V_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{d(4-2t)}{dt} = -2\,(м/с).$$

Величина вектора скорости по своим проекциям определяется по теореме Пифагора:

$$V = \sqrt{V_x{}^2 + V_y{}^2} = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}61\,(м/с) = const.$$

Полученный результат не содержит параметра t, т.е. скорость - есть величина постоянная и материальная точка движется вдоль прямой равномерно ($V_1 = V$).

d) Определим полное ускорение точки.

Проекции вектора ускорения определяются производными по времени от функций проекций вектора скорости:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d(2)}{dt} = 0\,(м/с^2), \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d(-2)}{dt} = 0\,(м/с).$$

Величина ускорения по своим проекциям определяется по теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2} = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0\,(м/с^2).$$

Как и ожидалось для равномерного движения вдоль прямой, полное ускорение точки равно нулю.

e) Определим касательное ускорение точки.
Оно вычисляется как производная от величины скорости:
$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d(const)}{dt} = 0\ (м/с^2).$$
f) Определим нормальное ускорение точки.
Его вычисление проведем в соответствии с формулой (2.29):
$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau{}^2} = \sqrt{0^2 - 0^2} = 0\ (м/с^2)$$
g) Определим радиус кривизны траектории в данной точке.
Используя формулу (2.28), получим:
$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{(3{,}61)^2}{0} \to \infty.$$
Как и ожидалось, радиус кривизны у прямой бесконечно большой (кривизна равна нулю).

Ответ:
- траектория движения представляет собой полупрямую $y = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x$ с началом в точке (-5,4) (рис.8);
- положение точки для момента времени t_1 определяется координатами $x_1 = -2$ (м), $y_1 = 2$ (м);
- скорость точки для момента времени t_1 равна $V_1 \approx 3{,}61\ (м/с)$;
- полное ускорение точки для момента времени t_1 равно $a_1 = 0\ (м/с^2)$;
- касательное ускорение точки для момента времени t_1 равно $a_1^\tau = 0\ (м/с^2)$;
- нормальное ускорение точки для момента времени t_1 равно $a_1^n = 0\ (м/с^2)$;
- радиус кривизны траектории в данной точке стремится к бесконечности $\rho_1 \to \infty$.

6. $x = 2t$ (м) $y = 8t^2$ (м) $t_1 = 0{,}5$ (с).

Решение:

a) Установим вид уравнения, связывающего функции x и y, по которому судят о траектории движения точки. Из первого уравнения:
$$t = \frac{x}{2},$$
после подстановки во второе:
$$y = 8(\frac{x}{2})^2 = 2x^2,$$
или окончательно:

$$y = 2x^2.$$

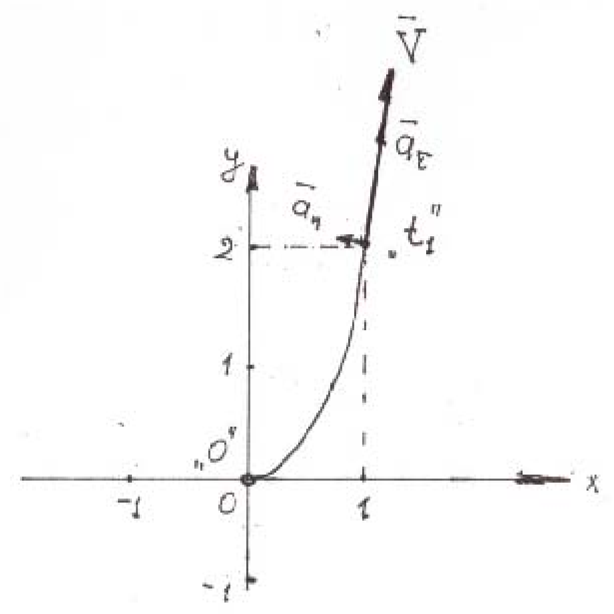


Рис.9

Это уравнение описывает параболу с вершиной в начале координат (рис.9). Начало движения соответствует моменту времени $t_0 = 0$. Используя исходные функции, найдем положение начальной точки:

$$x_0 = 2t_0 = 0 \text{ (м)}, \qquad y_0 = 8t_0^2 = 0 \text{ (м)}.$$

Материальная точка начнет свое движение из геометрической точки с координатами $x_0 = 0$ (м), $y_0 = 0$ (м). Исходя из вида заданных координатных функций, при увеличении параметра t значения x и y будут возрастать, т.е. материальная точка будет перемещаться направо и вверх. Таким образом, траектория движения представляет собой правую ветвь параболы $y = 2x^2$ с началом в ее вершине (0,0).

b) Положение точки в момент времени t_1 определим путем подстановки t_1 в исходные зависимости:

$$x_1 = 2t_1 = 2 \cdot 0{,}5 = 1 \text{ (м)}, \qquad y_1 = 8 \cdot 0{,}5^2 = 2 \text{ (м)}.$$

c) Скорость точки.

Проекции вектора скорости:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(2t)}{dt} = 2\,(м/с),$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(8t^2)}{dt} = 16t\,(м/с)$$

Величина вектора скорости:

$$V=\sqrt{V_x{}^2+V_y{}^2}=\sqrt{2^2+(16t)^2}=\sqrt{4+256t^2}\ (м/с).$$

Значение скорости в момент времени t_1:

$$V_1=\sqrt{4+256t_1{}^2}=\sqrt{4+256(0,5)^2}=\sqrt{68}\approx 8,25\ (м/с)$$

d) Полное ускорение точки:

$$a_x=\frac{dV_x}{dt}=\frac{d(2)}{dt}=0\ (м/с^2),\quad a_y=\frac{dV_y}{dt}=\frac{d(16t)}{dt}=16\ (м/с).$$

Величина ускорения по своим проекциям определяется по теореме Пифагора:

$$a=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2}=\sqrt{0^2+16^2}=16\ (м/с^2)=const=a_1.$$

e) Касательное ускорение точки:

$$a_\tau=\frac{dV}{dt}=\frac{d(\sqrt{4+256t^2})}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{4+256t^2}}(2\cdot 256t)=\frac{256t}{\sqrt{4+256t^2}}\ (м/с^2)$$

Для момента времени t_1:

$$a_1^\tau=\frac{256t_1}{\sqrt{4+256t_1{}^2}}=\frac{256\cdot 0,5}{\sqrt{4+256(0,5)^2}}=\frac{128}{\sqrt{68}}\approx 15,52\ (м/с^2)$$

f) Нормальное ускорение точки.

Его вычисление проведем в соответствии с формулой (2.29):

$$a_1^n=\sqrt{a_1{}^2-a_1^{\tau 2}}=\sqrt{16^2-15,52^2}\approx 3,88\ (м/с^2)$$

g) Радиус кривизны траектории в данной точке:

$$\rho_1=\frac{V_1^2}{a_1^n}\approx\frac{(6,25)^2}{3,88}\approx 17,53\ (м).$$

<u>Ответ</u>:

- траектория движения представляет собой правую ветвь параболы $y=2x^2$ с вершиной в начале координат (рис.9);
- положение точки для момента времени t_1 определяется координатами $x_1 = 1$ (м) , $y_1 = 2$ (м);
- скорость точки для момента времени t_1 равна $V_1\approx 8,25\ (м/с)$;
- полное ускорение точки для момента времени t_1 равно $a_1=16\ (м/с^2)$;
- касательное ускорение точки для момента времени t_1 равно $a_1^\tau\approx 15,52\ (м/с^2)$;
- нормальное ускорение точки для момента времени t_1 равно $a_1^n\approx 3,88\ (м/с^2)$;
- радиус кривизны траектории в данной точке $\rho_1\approx 17,53\ (м)$.

7. $x=5\sin 10t\ (см),\quad y=3\cos 10t\ (см),\quad t_1=\frac{\pi}{2}\ (с)$

Решение:

а) Установим вид уравнения, связывающего функции x и y, по которому судят о траектории движения точки. Из первого уравнения:

$$sin 10t = \frac{x}{5}.$$

Из второго:

$$cos 10t = \frac{y}{3},$$

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством ($sin^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1$), приняв $\alpha = 10t$:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

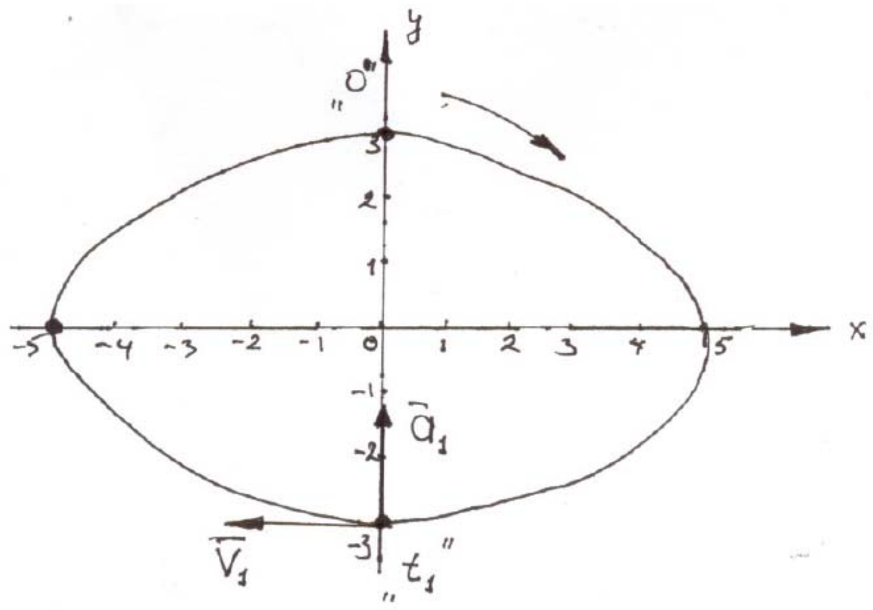


Рис.10

Это уравнение описывает эллипс с полуосями, по координатам x и y, соответственно равными 5 см и 3 см. Центр эллипса совпадает с началом координат (рис.10). Начало движения соответствует моменту времени $t_0 = 0$. Используя исходные функции, найдем положение начальной точки:

$$x_0 = 5 sin 0 = 0\,(см), \quad y_0 = 3 cos 0 = 3\,(см).$$

Материальная точка начнет свое движение из геометрической точки с координатами $x_0 = 0$ (см), $y_0 = 3$ (см). При увеличении параметра t в первой четверти периода исходных тригонометрических функций значение x будет возрастать, а y – убывать, т.е. материальная точка будет перемещаться по эллипсу направо и вниз, или двигаться по ходу часовой стрелки. Таким образом, траектория движения представляет собой эллипс $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ с начальной точкой движения с координатами (0,3) по ходу часовой стрелки.

b) Положение точки в момент времени t_1 определим путем подстановки t_1 в исходные зависимости:

$$x_1 = 5\sin 10\frac{\pi}{2} = 5\sin 5\pi = 0\,(см),$$

$$y_1 = 3\cos 10\frac{\pi}{2} = 3\cos 5\pi = -3\,(см).$$

c) Скорость точки.

Проекции вектора скорости:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(5\sin 10t)}{dt} = 5\cdot 10\cos 10t = 50\cos 10t\,(см/с),$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(3\cos 10t)}{dt} = -3\cdot 10\sin 10t = -30\sin 10t\,(см/с)$$

Величина вектора скорости:

$$V = \sqrt{V_x{}^2 + V_y{}^2} = \sqrt{(50\cos 10t)^2 + (-30\sin 10t)^2} =$$
$$= \sqrt{2500\cos^2 10t + 900\sin^2 10t} = \qquad .$$
$$= \sqrt{1600\cos^2 10t + 900} = 10\sqrt{16\cos^2 10t + 9}\,(см/с)$$

Значение скорости в момент времени t_1:

$$V_1 = 10\sqrt{16\cos^2 10t_1 + 9} = 10\sqrt{16\cos^2 5\pi + 9} = 10\sqrt{25} = 50\,(см/с)$$

d) Полное ускорение точки:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d(50\cos 10t)}{dt} = -500\sin 10t\,(см/с^2),$$
$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d(-30\sin 10t)}{dt} = -300\cos 10t\,(см/с) \qquad .$$

Величина ускорения по своим проекциям определяется по теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2} = \sqrt{(-500\sin 10t)^2 + (-300\cos 10t)^2} = \qquad .$$
$$= 100\sqrt{25\sin^2 10t + 9\cos^2 10t}\,(м/с^2)$$

Для момента времени t_1:

$$a_1 = 100\sqrt{25\sin^2 10t_1 + 9\cos^2 10t_1} = 100\sqrt{25\sin^2 5\pi + 9\cos^2 5\pi} =$$
$$= 100\sqrt{25\cdot 0 + 9\cdot 1} = 300\,(см/с^2)$$

e) Касательное ускорение точки:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d(10\sqrt{16cos^2 10t + 9})}{dt} =$$

$$= \frac{10}{2\sqrt{16cos^2 10t + 9}}(-16 \cdot 2sin10t) = -\frac{160sin10t}{\sqrt{16cos^2 10t + 9}}\ (см/c^2)$$

Для момента времени t_1:

$$a_1^\tau = -\frac{160sin10t_1}{\sqrt{16cos^2 10t_1 + 9}} = \frac{160 \cdot sin5\pi}{\sqrt{16cos^2 5\pi + 9}} = 0\ (см/c^2)$$

f) Нормальное ускорение точки. :

$$a_1^n = \sqrt{a_1{}^2 - a_1^{\tau 2}} = \sqrt{300^2 - 0^2} = 300\ (см/c^2)$$

g) Радиус кривизны траектории в данной точке:

$$\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_1^n} = \frac{(50)^2}{300} = \frac{2500}{300} \approx 8,33\ (см).$$

Ответ:

- траектория движения представляет собой эллипс $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ с начальной точкой движения с координатами (0,3) в направление по ходу часовой стрелки. (рис.10);
- положение точки для момента времени t_1 определяется координатами x_1 = 0 (см) , y_1 = -3 (см);
- скорость точки для момента времени t_1 равна $V_1 = 50\ (см/c)$;
- полное ускорение точки для момента времени t_1 равно $a_1 = 300\ (см/c^2)$;
- касательное ускорение точки для момента времени t_1 равно $a_1^\tau = 0\ (см/c^2)$;
- нормальное ускорение точки для момента времени t_1 равно $a_1^n = 300\ (см/c^2)$;
- радиус кривизны траектории в данной точке $\rho_1 \approx 8,33\ (см)$.

8. $x = 5 - 3sin\frac{\pi}{2}t\ (см), \quad y = -2 + 3cos\frac{\pi}{2}t\ (см), \quad t_1 = 1\ (c)$

Решение:

a) Установим вид уравнения, связывающего функции x и y, по которому судят о траектории движения точки. Из первого уравнения:

$$sin\frac{\pi}{2}t = \frac{5 - x}{3}.$$

Из второго:

$$cos\frac{\pi}{2}t = \frac{y + 2}{3},$$

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством ($sin^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1$), приняв $\alpha = \frac{\pi}{2} t$:

$$\frac{(5-x)^2}{3^2} + \frac{(y+2)^2}{3^2} = 1,$$

или $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 3^2$

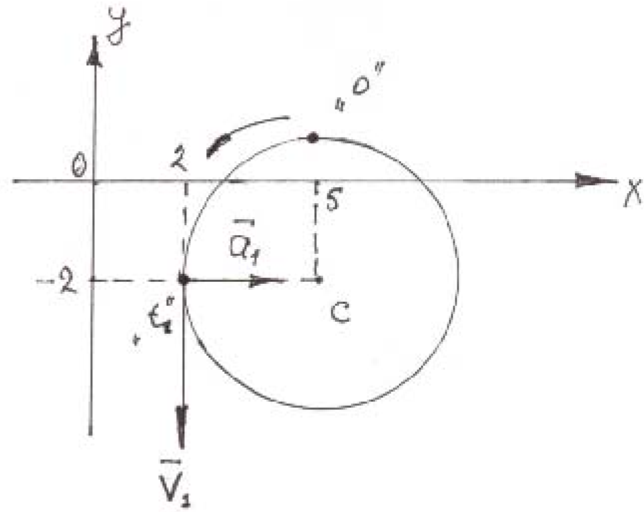


Рис.11

Это уравнение описывает окружность с радиусом 3 см. Центр окружности располагается в точке С с координатами (5,-2). (рис.11). Начало движения соответствует моменту времени $t_0 =$ 0. Используя исходные функции, найдем положение начальной точки:

$$x_0 = 5 - 3sin\frac{\pi}{2}t_0 = 5 - 3sin0 = 5\ (см),$$

$$y_0 = -2 + 3cos\frac{\pi}{2}t_0 = -2 + 3cos0 = 1\ (см)$$

Материальная точка начнет свое движение из геометрической точки с координатами $x_0 = 5$ (см), $y_0 = 1$ (см). При увеличении параметра t в первой четверти периода исходных тригонометрических функций значения x и y будут убывать, т.е. материальная точка будет перемещаться по окружности налево и вниз, или двигаться протии хода часовой стрелки.

b) Положение точки в момент времени t_1 определим путем подстановки t_1 в исходные зависимости:

$$x_1 = 5 - 3sin\frac{\pi}{2}t_1 = 5 - 3sin\frac{\pi}{2} = 2\,(см),$$

$$y_1 = -2 + 3cos\frac{\pi}{2}t_1 = -2 + 3cos\frac{\pi}{2} = -2\,(см).$$

c) Скорость точки.

Проекции вектора скорости:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(5 - 3sin\frac{\pi}{2}t)}{dt} = -3\frac{\pi}{2}cos\frac{\pi}{2}t = -\frac{3\pi}{2}cos\frac{\pi}{2}t\,(см/с),$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(-2 + 3cos\frac{\pi}{2}t)}{dt} = -3\frac{\pi}{2}10\,sin\frac{\pi}{2}t = -\frac{3\pi}{2}sin\frac{\pi}{2}t\,(см/с)$$

Величина вектора скорости:

$$V = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2}} = \sqrt{(-\frac{3\pi}{2}cos\frac{\pi}{2}t)^2 + (-\frac{3\pi}{2}sin\frac{\pi}{2}t)^2} = \frac{3\pi}{2}\,(см/с) = const = V_1.$$

d) Полное ускорение точки:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d(-\frac{3\pi}{2}cos\frac{\pi}{2}t)}{dt} = \frac{3\pi^2}{4}sin\frac{\pi}{2}t\,(см/с^2), \qquad .$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d(-30\,sin10t)}{dt} = -\frac{3\pi^2}{4}cos\frac{\pi}{2}t\,(см/с).$$

Величина ускорения по своим проекциям определяется по теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2}} = \sqrt{(\frac{3\pi^2}{4}sin\frac{\pi}{2}t)^2 + (-\frac{3\pi^2}{4}cos\frac{\pi}{2}t)^2} = \frac{3\pi^2}{4}\,(см/с^2) = const = a_1.$$

e) Касательное ускорение точки:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d(\frac{3\pi}{2})}{dt} = 0\,(см/с^2) = a_1^\tau$$

f) Нормальное ускорение точки:

$$a_n = a_1^n = \sqrt{a_1^{\,2} - a_1^{\tau 2}} = \sqrt{(\frac{3\pi^2}{4})^2 - 0^2} = \frac{3\pi^2}{4}\,(см/с^2)$$

g) Как и ожидалось, радиус кривизны траектории в данной точке равен радиусу окружности:

$$\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_1^n} = \frac{(\frac{3\pi}{2})^2}{(\frac{3\pi^2}{4})} = 3\,(см).$$

Ответ:

- траектория движения представляет собой окружность $(x-5)^2+(y+2)^2=3^2$ с радиусом 3 см и центром окружности в точке С с координатами (5, -2). Координаты начальной точки - (5,1), направление движения против хода часовой стрелки. (рис.11);
- положение точки для момента времени t_1 определяется координатами $x_1 = 2$ (см) , $y_1 = -2$ (см);
- скорость точки для момента времени t_1 равна $V_1=\dfrac{3\pi}{2}\approx 4,71\,(см/с)$;
- полное ускорение точки для момента времени t_1 равно $a_1=\dfrac{3\pi^2}{4}\approx 7,40\,(см/с^2)$;
- касательное ускорение точки для момента времени t_1 равно $a_1^{\tau}=0\,(см/с^2)$;
- нормальное ускорение точки для момента времени t_1 равно $a_1^{n}=\dfrac{3\pi^2}{4}\approx 7,40\,(см/с^2)$;
- радиус кривизны траектории $\rho_1=\rho=3\,(см)$.

Практическое занятие 3

Практическое занятие 3 состоит из 1 блока:

- в 1 блоке изучается кинематика вращательного и поступательного движении твердого тела.

1 блок

Теоретическая часть:

- Лекция 3 (тема 5);
- Лекция 4 (тема 6).

Практическая часть:

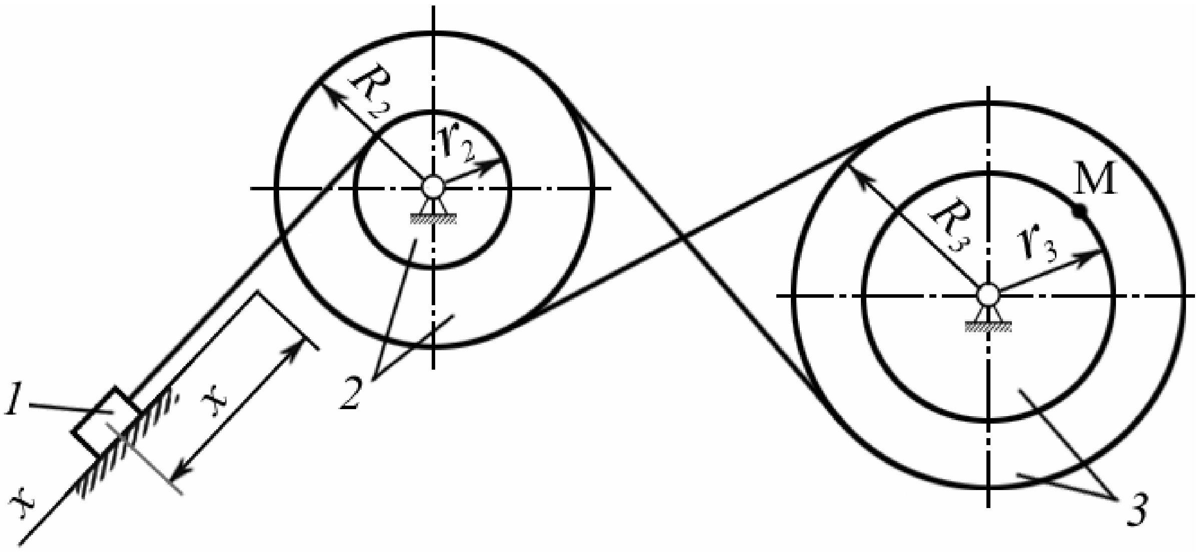
ЗАДАЧА 8.

ДАНО. Заданный механизм представлен на рис.1, уравнение движения груза 1 описывается выражением:

$$x = C_2t^2 + C_1t + C_2 .$$

В начальный момент времени $t_0 = 0$ начальная координата груза x_0=0,14м, а начальная скорость V_0 = 0,05м/с .

Рис.1. Схема механизма



В момент времени $t = t_2 = 2$с координата груза $x_2 = 1{,}68$м.

$R_2 = 0{,}50$м; $r_2 = 0{,}25$м; $R_3 = 0{,}65$м; $r_3 = 0{,}40$м.

ОПРЕДЕЛИТЬ:

- уравнение движения груза 1;
- скорость и ускорение груза 1. в момент времени $t = t_1$;
- угловые скорости и угловые ускорения шкивов 2 и 3 в момент времени $t = t_1$;
- скорость и ускорение точки М шкива 3 при $t = t_1$.

РЕШЕНИЕ.

ДАНО: $x = C_2t^2 + C_1t + C_0$; $t_0 = 0$; $x_0 = 0{,}14$ м; $\dot{x}_0 = V_0 = 0{,}05$ м/с;

$t_2 = 2$ с; $x_2 = 1{,}68$ м; $t_1 = 1$с;

$R_2 = 0{,}50$м; $r_2 = 0{,}25$м; $R_3 = 0{,}65$м; $r_3 = 0{,}40$м

ОПРЕДЕЛИТЬ: $x = x(t);\ V_1;\ a_1;\ \omega_2;\ \varepsilon_2;\ \omega_3;\ \varepsilon_3;\ V_М;\ a_М$.

Итак:

- груз 1 движется поступательно по наклонной плоскости вниз;
- шкив 2 вращается вокруг неподвижной оси O_2z_2 (рис.2);
- шкив 3 вращается вокруг неподвижной оси O_3z_3 (рис.2).

Уравнение движения груза 1

$$x = C_2t^2 + C_1t + C_0 \qquad (1)$$

Скорость груза 1 определим, продифференцировав закон движения по времени:

$$V = \dot{x} = 2 \cdot C_2t + C_1 \qquad (2)$$

Касательное ускорение груза 1 определим, получив вторую производную от уравнения (2):

$$a_\tau = \dot{V} = \ddot{x} = 2 \cdot C_2 = \text{const} \qquad (3)$$

Таким образом, ускорение не зависит от времени t. Следовательно, ускорение есть величина постоянная, а движение груза - равноускоренное. При движении по прямой нормальное ускорение отсутствует (a_n=0), поэтому полное ускорение груза определяется только касательной составляющей (a=a_τ).

Для определения постоянных коэффициентов подставим начальные условия в уравнения (1) и (2).

$t_0 = 0$; $x_0 = 0{,}14$ м; $\dot{x}_0 = V_0 = 0{,}05$ м/с;

$x_0 = C_2 \cdot 0 + C_1 \cdot 0 + C_0$, откуда $C_0 = x_0$

$\dot{x}_0 = 2 \cdot C_2 \cdot 0 + C_1$, откуда $C_1 = \dot{x}_0$

Подставляя числовые значения, находим коэффициенты

$C_0 = 0{,}14$ м, $C_1 = 0{,}05$ м/с;

Для определения коэффициента C_2 используем данные для момента времени t_2, подставляя их в уравнение (1):

при $t_2 = 2$ с, $x_2 = 1{,}68$ м,

$$x_2 = C_2 \cdot t_2^2 + C_1 \cdot t_2 + C_0,$$

откуда $$C_2 = \frac{x_2 - C_1 \cdot t_2 - C_0}{t_2^{\,2}}$$

Подставляя числовые значения, получаем:

$$C_2 = \frac{1{,}68 - 0{,}05 \cdot 2 - 0{,}14}{2^2} = 0{,}36 \quad м/с^2$$

Таким образом, уравнение движения груза 1:

$$x = 0{,}36t_2^2 + 0{,}05t_2 + 0{,}14 \qquad (4)$$

Скорость груза 1:

$$V = \dot{x} = 0{,}72t + 0{,}05 \qquad (5)$$

Касательное ускорение груза 1

$$a_\tau = \ddot{x} = 0{,}72 \text{ м/с}^2 = \text{const} \qquad (6)$$

Значение координаты, скорости и ускорения груза 1 в заданный момент времени $t = t_1 = 1$(с) найдем, подставив это время в уравнение (4), (5), (6).

$$x_1 = 0{,}36t_1^2 + 0{,}05t_1 + 0{,}14$$

$$V_1 = 0{,}72t_1 + 0{,}05$$

$$a_1^\tau = 0{,}72 = \text{const}$$

Подставляя числовые значения, находим

$$x_1 = 0{,}36 \cdot 1^2 + 0{,}05 \cdot 1 + 0{,}14 = 0{,}55 \text{ м}$$

$$V_1 = 0{,}72 \cdot 1 + 0{,}05 = 0{,}77 \text{ м/с}$$

$$a_1^\tau = 0{,}72 = \text{const} = 0{,}72 \text{ м/с}^2$$

Направления показаны на рисунке 2. Векторы скорости и ускорения направлены по оси Ох, (V_1 и a_1^τ положительны).

Так как нить нерастяжимая**,** то

$$V_E = V_1 = 0{,}77 \text{ м/с}$$

$$a_E^\tau = a_1 = 0{,}72 \text{ м/с}^2$$

Из кинематики вращения тела 2 вокруг неподвижной оси O_2z_2:
угловая скорость

$$\omega_2 = \frac{V_E}{EO_2},$$

где EO_2 – кратчайшее расстояние от точки до оси вращения;

$$\omega_2 = \frac{V_1}{r_2} = \frac{0,77}{0,25} = 3,08 \quad рад/с$$

Направление угловой скорости ω_2 соответствует направлению вектора скорости в т. F , т.е. против хода часовой стрелки (рис.2);

Угловое ускорение:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_E^\tau}{EO_2} = \frac{a_E^\tau}{r_2} = \frac{0,72}{0,25} = 2,88 \text{ рад/с}^2$$

Направление углового ускорения ε_2 соответствует направлению вектора касательного ускорения $\overline{a_E}^\tau$ (против хода часовой стрелки) (рис.2);

Модуль скорости точки К

$V_К = \omega_2 \cdot КO_2$

где $КO_2$ - кратчайшее расстояние от точки до оси вращения O_2z_2 .

$V_К = \omega_2 \cdot R_2 = 3,08 \cdot 0,50 = 1,54$ м/с

Направлен вектор скорости $\overline{V_К}$ перпендикулярно к кратчайшему расстоянию $КO_2$ и соответствует направлению угловой скорости ω_2 (рис.2).

Касательное ускорение точки К

$a_K^\tau = \varepsilon_2 \cdot КO_2 = \varepsilon_2 \cdot R_2$

$a_K^\tau = 2,88 \cdot 0,50 = 1,44$ м/с^2

Направлен вектор касательного ускорения точки К перпендикулярно кратчайшему расстоянию от точки К до оси вращения, т. е. $\overline{a_K}^\tau \perp КO_2$ и соответствует направлению углового ускорения ε_2.

Так как ремень нерастяжимый, то

$V_N = V_К = 1,54$ м/с

$a_N^\tau = a_K^\tau = 1,44$ м/с^2

Направления векторов $\overline{V_N}$ и $\overline{a_N}^\tau$ показаны на рис.2.

Из кинематики вращения тела 3 вокруг неподвижной оси вращения O_3z_3: угловая скорость

$$\omega_3 = \frac{V_N}{NO_3},$$

где NO_3 - кратчайшее расстояние от точки N до оси вращения O_3z_3 .

$$\omega_3 = \frac{V_N}{R_3} = \frac{1,54}{0,65} = 2,37 \ \ рад/с$$

Направлена угловая скорость по часовой стрелке и соответствует направлению вектора скорости $\overline{V}_N$ (рис. 2)

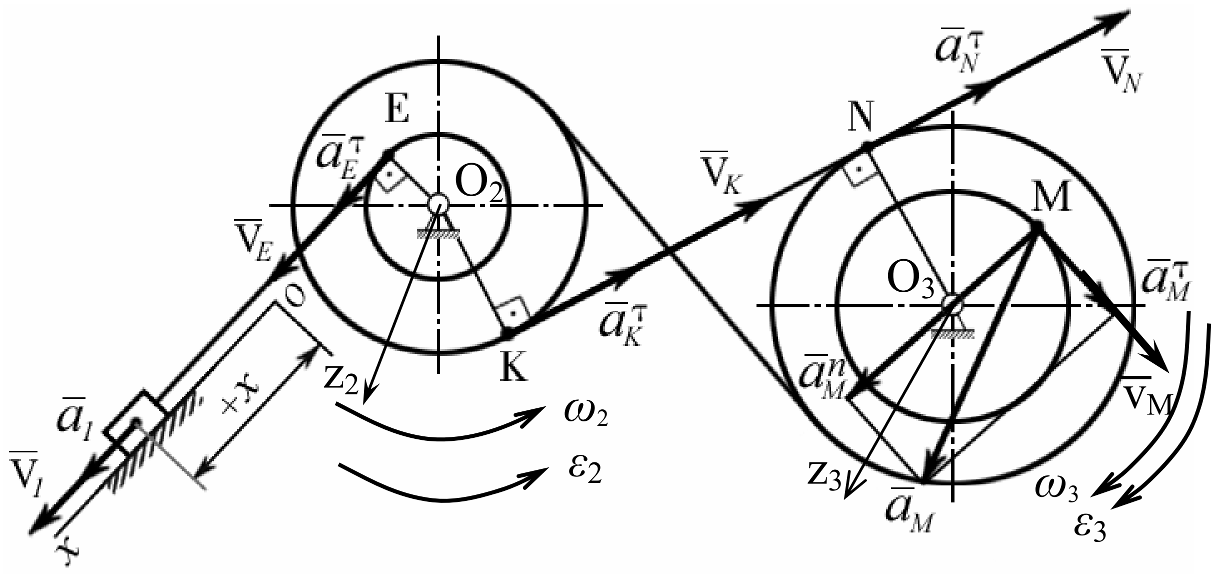


Рис. 2.

Угловое ускорение

$$\varepsilon_3 = \frac{a_N^\tau}{NO_2} = \frac{1,44}{0,65} = 2,22 \quad рад/с^2$$

Направление углового ускорения ε_3 соответствует направлению вектора касательного ускорения a_N^τ (по часовой стрелке) (рис.2).

Скорость точки М:

$V_М = \omega_3 \cdot MO_3$

где MO_3 - кратчайшее расстояние от точки М до оси вращения $O_3 z_3$.

$V_М = \omega_3 \cdot r_3 = 2,37 \cdot 0,40 = 0,95$ м/с

Направлен вектор скорости точки М перпендикулярно кратчайшему расстоянию MO_3 и соответствует направлению угловой скорости ω_3 (рис.2).

Касательное ускорение точки М:

$a_М^\tau = \varepsilon_3 \cdot MO_3$

$a_М^\tau = \varepsilon_3 \cdot r_3 = 2,22 \cdot 0,40 = 0,89$ м/с^2

Направлен вектор касательного ускорения перпендикулярно кратчайшему расстоянию от точки до оси вращения, ~~т.~~е. $a_M^\tau \perp MO_3$, соответствует направлению углового ускорения ε_3 (рис.2).

Нормальное ускорение точки М:

$$a_M^n = \omega_3^2 \cdot MO_3$$

$$a_M^n = \omega_3^2 \cdot r_3 = 2{,}37^2 \cdot 0{,}40 = 2{,}25 \text{ м/с}^2$$

Направлен вектор нормального ускорения по радиусу MO_3 в сторону оси вращения (рис.2).

Полное ускорение точки М есть векторная сумма двух ускорений

$$\overline{a_M} = \overline{a_M^n} + \overline{a_M^\tau}$$

Его величина:

$$a_M = \sqrt{(a_M^n)^2 + (a_M^\tau)^2}; \; a_M = \sqrt{2{,}25^2 + 0{,}89^2} = 2{,}42 \text{ м/с}^2$$

Направление вектора $\overline{a_M}$ показано на расчетной схеме (рис.2) диагональю прямоугольника, построенного на векторах нормального и касательного ускорения как на сторонах.

Так как вектор ускорения a_1 и вектор скорости V_1 груза 1 направлены в одну сторону и при этом ускорение есть величина постоянная, то груз 1, тела 2 и 3, а вместе с ними и точка М совершают равноускоренное движение.

<u>ОТВЕТ.</u> $V_M = 0{,}95$ м/с $a_M = 2{,}42$ м/с^2

V_1 м/с	a_1 м/с^2	ω_2 рад/с	ε_3 рад/с^2	ω_3 рад/с	ε_3 рад/с^2
0,77	0,72	3,08	2,88	2,37	2,22