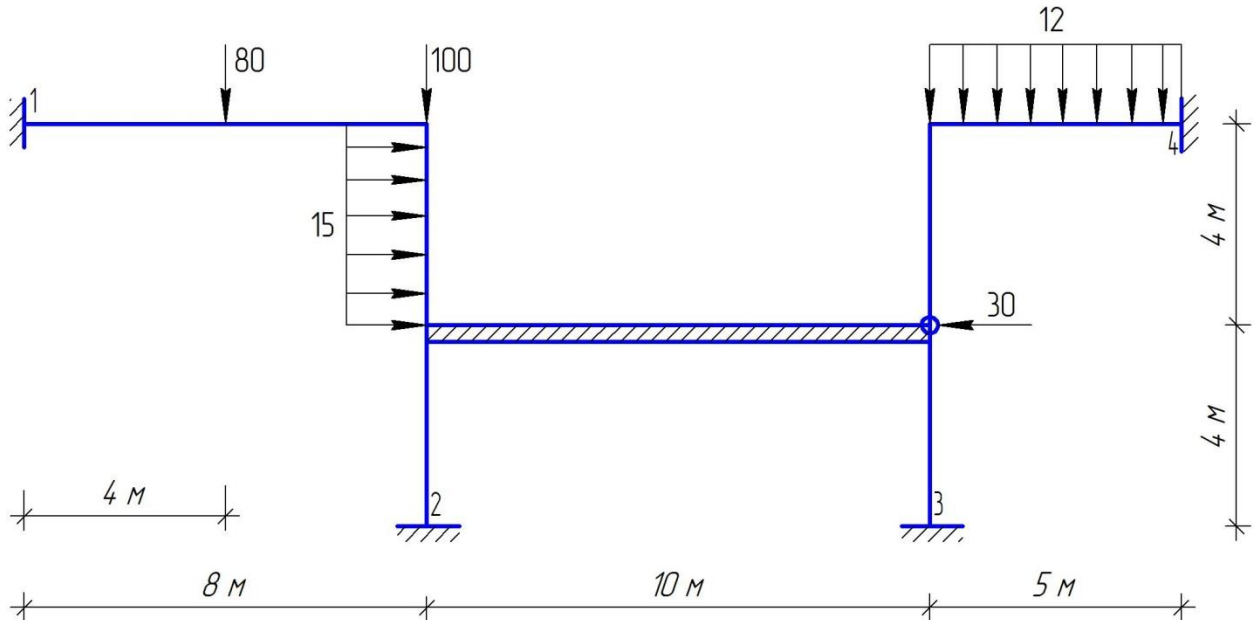


Исходные данные:

Схема рамы – 12; $a=8$ (м); $b=10$ (м); $c=5$ (м); $d=4$ (м); $e=4$ (м)

$J_p/J_c=2$; $P=100$ (кН); $P_1=80$ (кН); $P_2=30$ (кН); $q=12$ (кН/м); $q_1=15$ (кН/м)

Расчетная схема (1:140)



Расчет:

1. Определим степень статической неопределимости, найдем число степеней свободы: $W = 3D + 2Y - 2Ш - C - C_o$ (1.1)

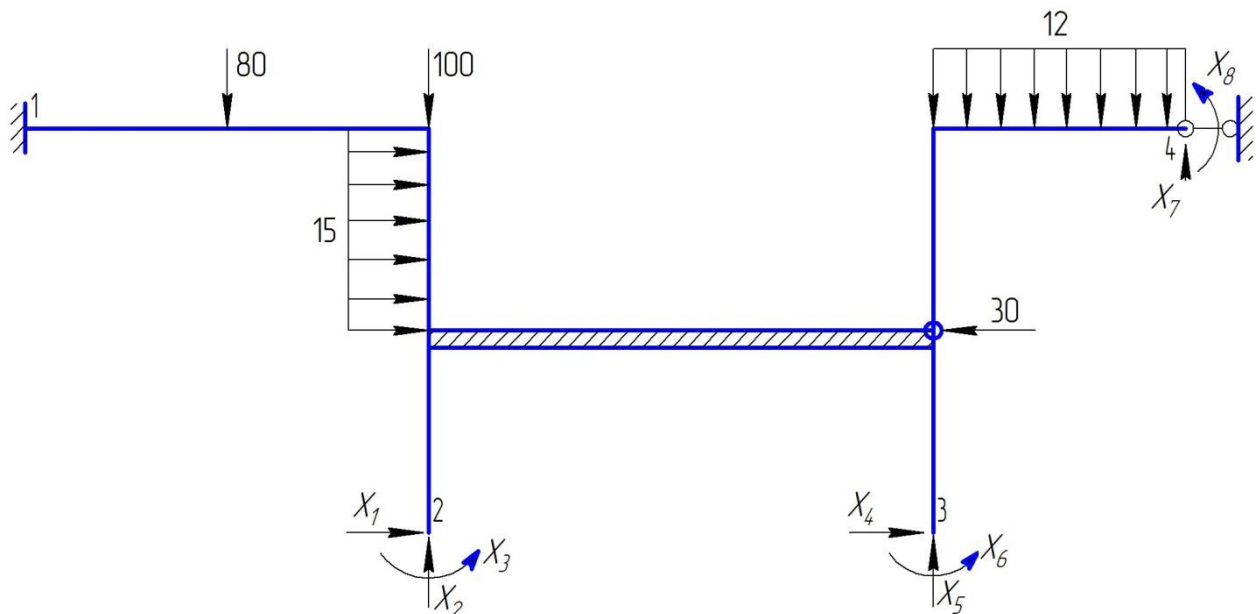
где, D – число дисков; Y – число узлов; $Ш$ – число однократных шарниров; C – число стержней; C_o – число опорных связей.

Отсюда, исходя из схемы рамы:

$$W = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 0 - 12 = -8 \Rightarrow \mathcal{L} = 8$$

Таким образом, система имеет 8 лишних связей, т.е. структура заданной системы является восемь раз статически неопределимой.

Основная система метода сил



Степень кинематической неопределимости определяется по формуле:

$$K = K_{\text{лин}} + K_{\text{угл}} \quad (1.2)$$

где, $K_{\text{лин}}$ – линейные перемещения системы; $K_{\text{угл}}$ – угловые перемещения системы.

Из-за бесконечно большой жесткости ригеля узлы 7-8 по его конца не поворачиваются и будут повороты узлов 5 и 8, т.е. $K_{\text{угл}} = 2$.

Горизонтальные перемещения возможны только ригеля 7-8, т.е., $K_{\text{лин}} = 1$.

Проверим линейные перемещения, исходя из формулы:

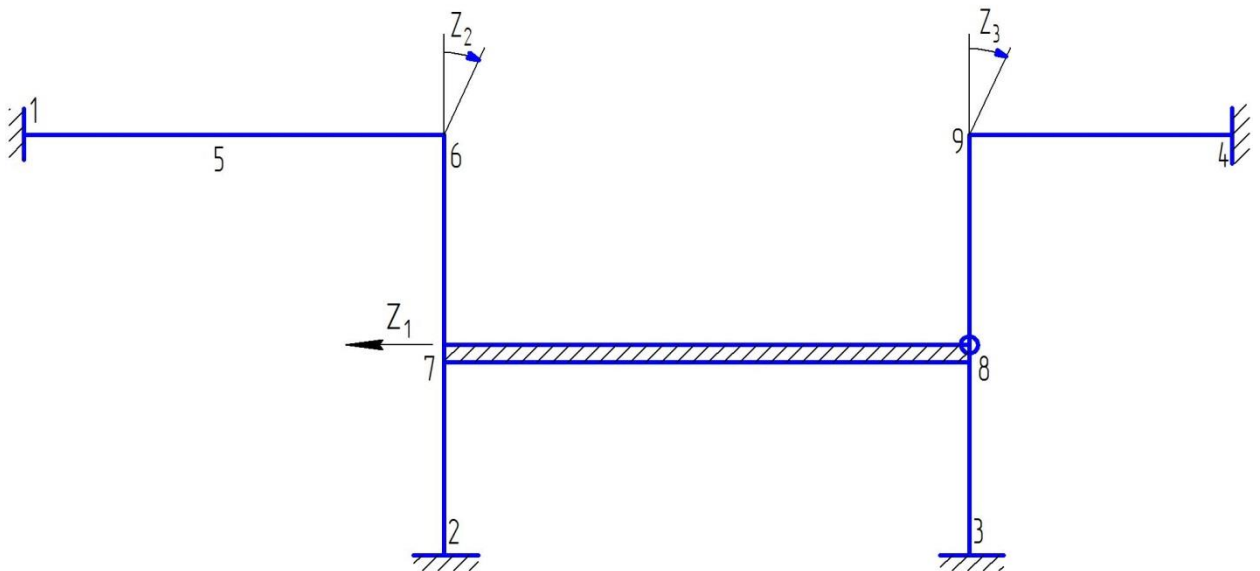
$$W = 2U - C - C_o \quad (1.3)$$

где, U – число узлов (включая опорные); C – число стержней; C_o – число опорных стержней. Отсюда: $W = 2 \cdot 8 - 7 - 8 = 1$

Таким образом, степень кинематической неопределимости равна:

$$K = 1 + 2 = 3$$

Основные неизвестные метода перемещений



2. Основные канонические уравнения и разрешающие условия имеют вид:

$$R_1 = 0; r_{11}z_1 + r_{12}z_2 + r_{13}z_3 + R_{1p} = 0 \quad (1.4)$$

$$R_2 = 0; r_{21}z_1 + r_{22}z_2 + r_{23}z_3 + R_{2p} = 0 \quad (1.5)$$

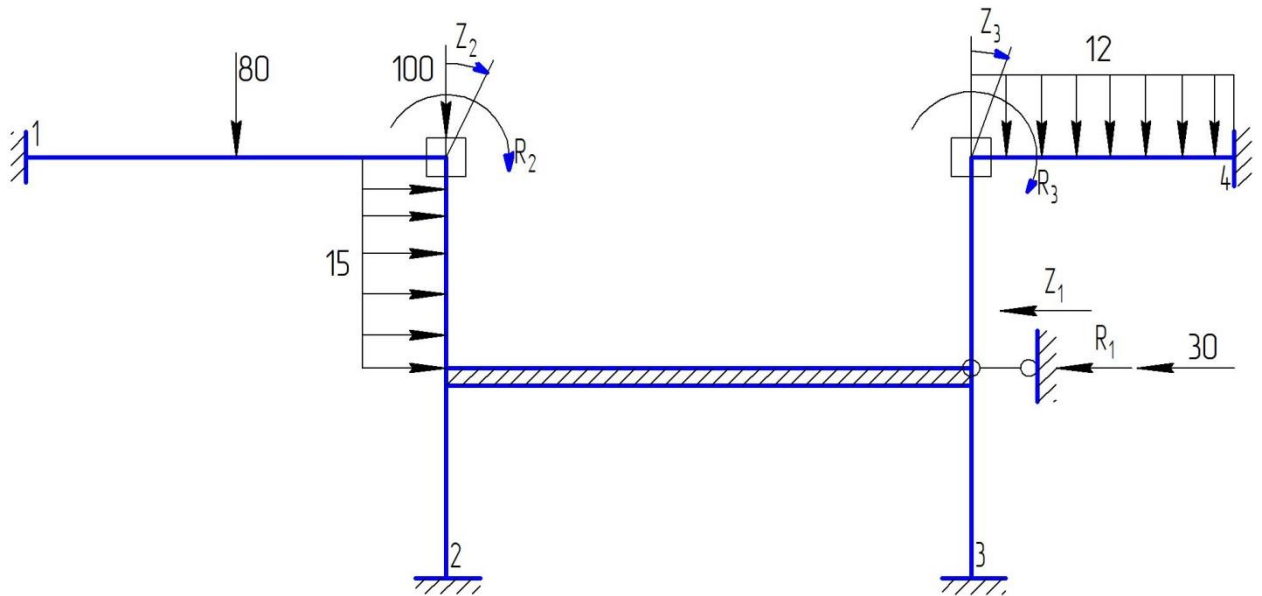
$$R_3 = 0; r_{31}z_1 + r_{32}z_2 + r_{33}z_3 + R_{3p} = 0 \quad (1.6)$$

В нашем случае механический смысл уравнений (1.4)-(1.6) заключается в следующем:

1) уравнение (1.4) отрицает реакцию в ригеле 7-8 по направлению первого неизвестного z_1 от заданной нагрузки и кинематического неизвестного z_1 ;

2) уравнения (1.5) и (1.6) отрицают угловые перемещения по направлению неизвестных z_2 и z_3 от заданной нагрузки и кинематических неизвестных z_2 и z_3 .

Основная система метода перемещений



Вычисляем ординаты эпюры M_p от действия заданных нагрузок.
стержень 1-6

$$M_1 = u \cdot v^2 \cdot Pl \Rightarrow M_1 = 0,5 \cdot 0,5^2 \cdot 80 \cdot 8 = 80 \text{ (кНм)}$$

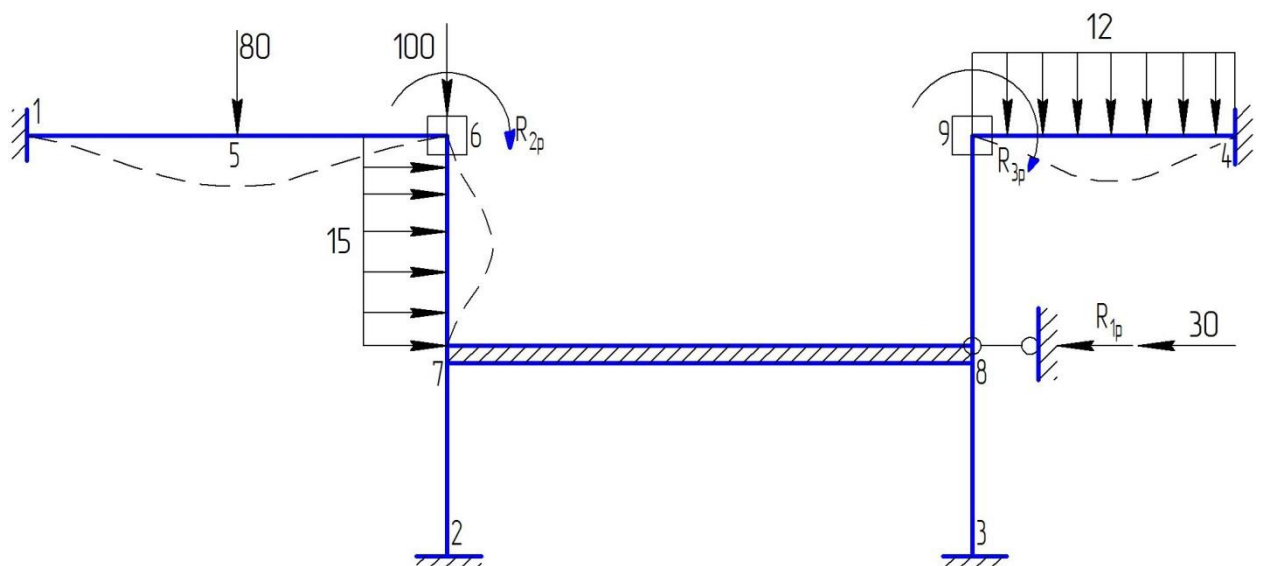
$$M_5 = 2 \cdot u^2 \cdot v^2 \cdot Pl \Rightarrow M_5 = 2 \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^2 \cdot 80 \cdot 8 = 80 \text{ (кНм)}$$

$$M_6 = u^2 \cdot v \cdot Pl \Rightarrow M_6 = 0,5^2 \cdot 0,5 \cdot 80 \cdot 8 = 80 \text{ (кНм)}$$

$$Q_1 = v^2 \cdot (1 + 2 \cdot u) \cdot P \Rightarrow Q_1 = 0,5^2 \cdot (1 + 2 \cdot 0,5) \cdot 80 = 40 \text{ (кН)}$$

$$Q_6 = -u^2 \cdot (1 + 2 \cdot v) \cdot P \Rightarrow Q_6 = -0,5^2 \cdot (1 + 2 \cdot 0,5) \cdot 80 = -40 \text{ (кН)}$$

Основная система под нагрузкой



стержень 6-7

$$M_6 = M_7 = \frac{ql^2}{12} \Rightarrow M_6 = M_7 = \frac{15 \cdot 4^2}{12} = 20 \text{ (кНм)}$$

$$f\text{-стрелка: } f = \frac{q \cdot l^2}{8} \Rightarrow f = \frac{15 \cdot 4^2}{8} = 30 \text{ (кНм)}$$

$$Q_7 = \frac{ql}{2} \Rightarrow Q_7 = \frac{15 \cdot 4}{2} = 30 \text{ (кН)}; \quad Q_6 = -\frac{ql}{2} \Rightarrow Q_6 = -\frac{15 \cdot 4}{2} = -30 \text{ (кН)}$$

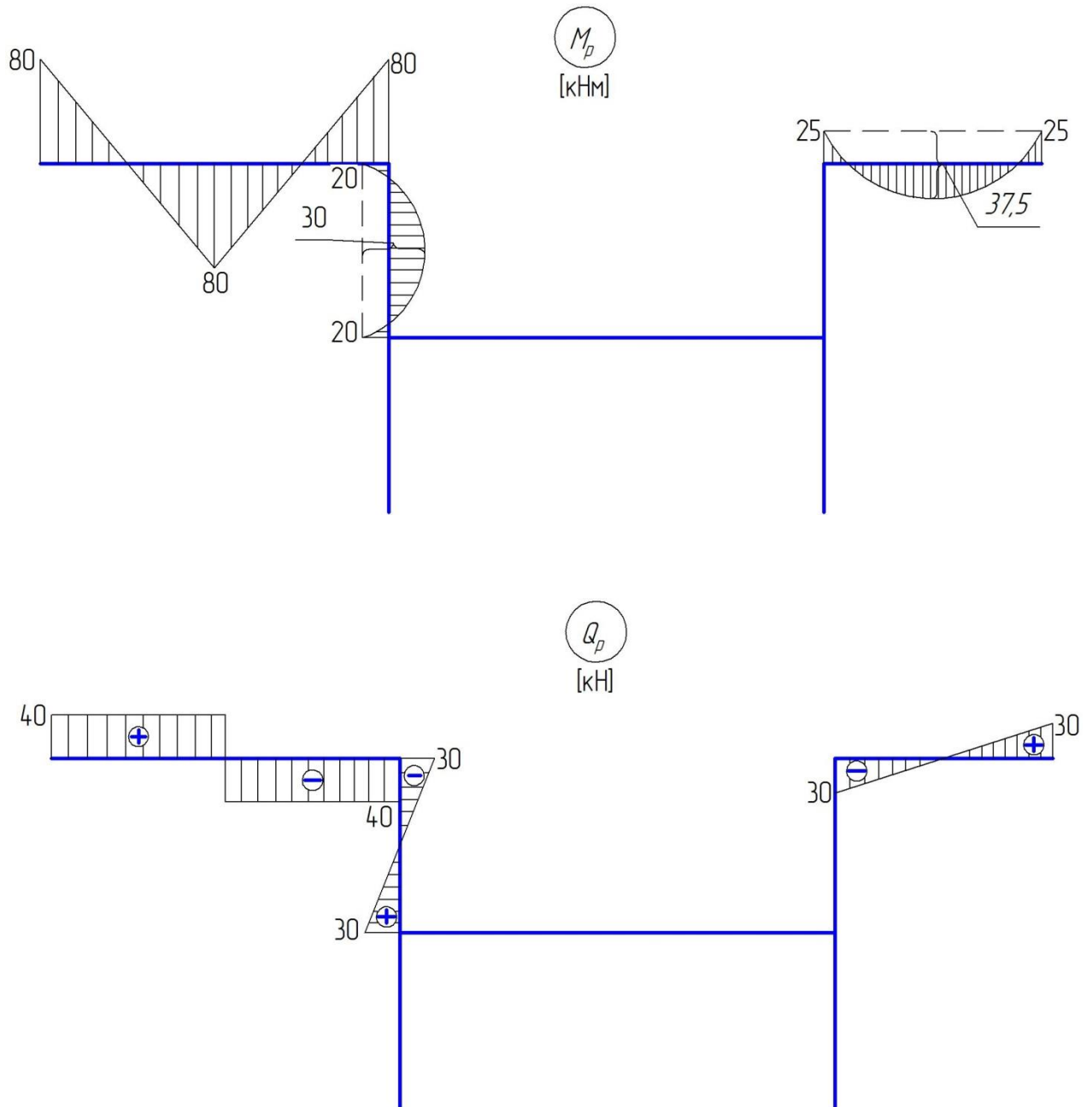
стержень 4-9

$$M_6 = M_7 = \frac{ql^2}{12} \Rightarrow M_4 = M_9 = \frac{12 \cdot 5^2}{12} = 25 \text{ (кНм)}$$

$$f\text{-стрелка: } f = \frac{q \cdot l^2}{8} \Rightarrow f = \frac{12 \cdot 5^2}{8} = 37,5 \text{ (кНм)}$$

$$Q_4 = \frac{ql}{2} \Rightarrow Q_4 = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30 \text{ (кН)}; \quad Q_9 = -\frac{ql}{2} \Rightarrow Q_9 = -\frac{12 \cdot 5}{2} = -30 \text{ (кН)}$$

Строим эпюры M_p и Q_p .



Определяем свободные члены уравнений R_{2p} и R_{3p} как реактивные пары шайб, наложенные на узлы 6 и 9 из условий равновесия этих узлов:

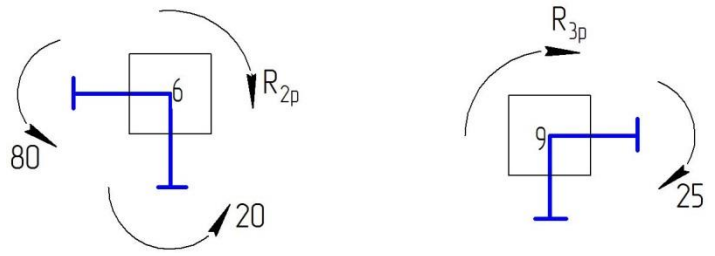
$$\sum M_6 = 0;$$

$$R_{2p} - 80 - 20 = 0 \Rightarrow R_{2p} = 100 \text{ (кНм)}$$

$$\sum M_9 = 0;$$

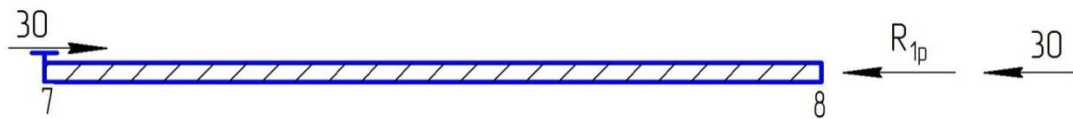
$$R_{3p} + 25 = 0 \Rightarrow R_{3p} = -25 \text{ (кНм)}$$

Реакция шайбы R_{3p} направлена в обратную сторону.



Свободный член R_{1p} как реактивную силу стержня, наложенного на ригель 7-8, определим из условия равновесия этого ригеля с силами, взятыми из эпюры Q_p :

$$\sum X_{7-8} = 0; 30 - R_{1p} - 30 = 0 \Rightarrow R_{1p} = 0 \text{ (кН)}$$



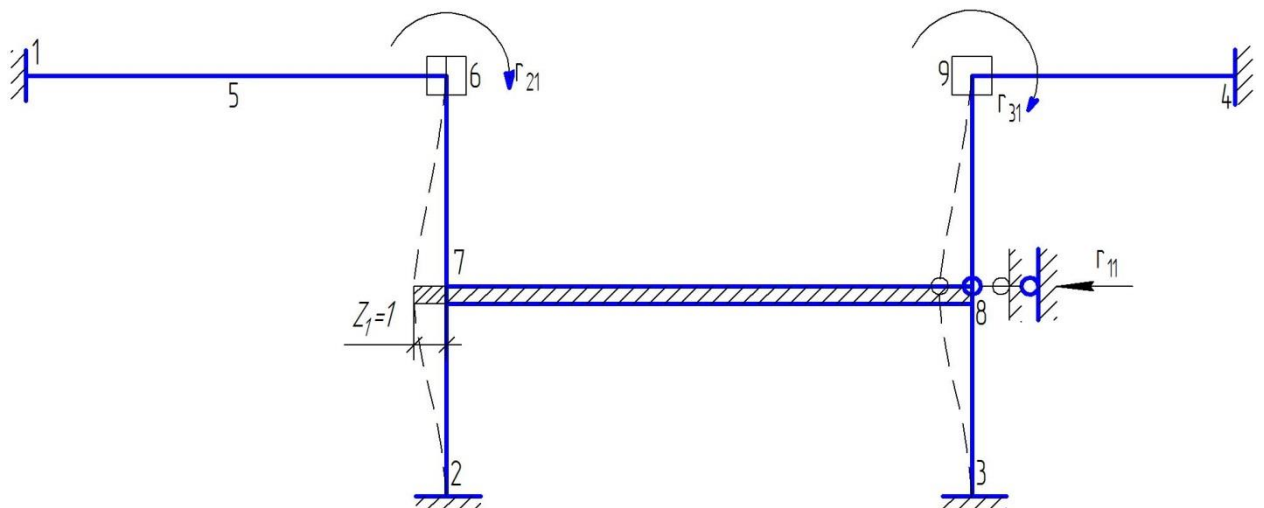
3. Так как по условию $J_p = 2J_c$, то обозначим $J_p = 2J$ и $J_c = J$ и рассмотрим состояние $z_1 = 1$:

стержень 6-7:

$$M_6 = M_7 = \frac{6EJ_c}{l_{6-7}^2} \Leftarrow M_6 = M_7 = \frac{6EJ}{4^2} = 0,375EJ$$

$$Q_6 = Q_7 = \frac{12EJ_c}{l_{6-7}^3} \Rightarrow Q_6 = Q_7 = \frac{12EJ}{4^3} = 0,1875EJ$$

Состояние $Z_1 = 1$



стержень 7-2

$$M_7 = M_2 = \frac{6EJ_c}{l_{7-2}^2} \Leftarrow M_7 = M_2 = \frac{6EJ}{4^2} = 0,375EJ$$

$$Q_7 = Q_2 = \frac{12EJ_c}{l_{7-2}^3} \Rightarrow Q_7 = Q_2 = \frac{12EJ}{4^3} = 0,1875EJ$$

стержень 9-8:

$$M_9 = \frac{3EJ_c}{l_{9-8}^2} \leftarrow M_9 = \frac{3EJ}{4^2} = 0,1875EJ$$

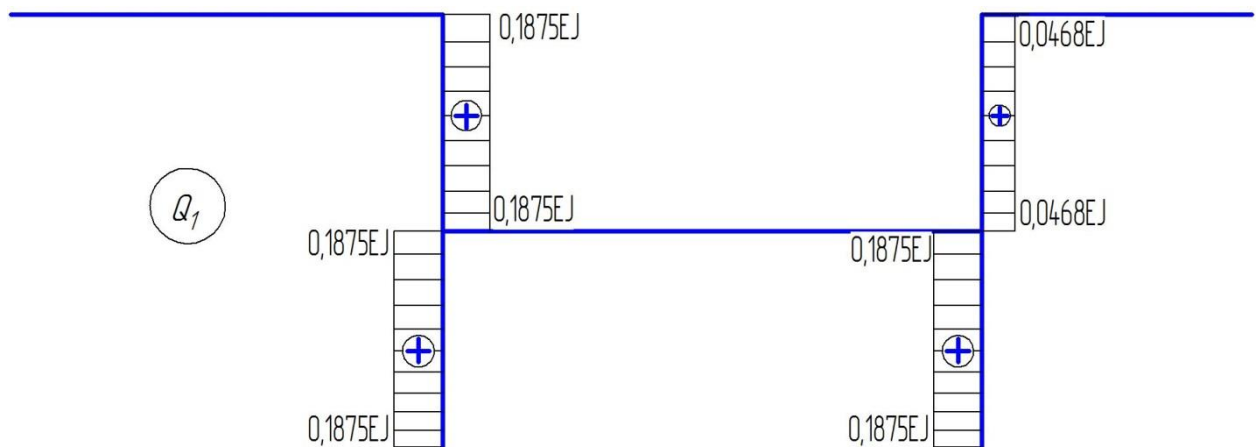
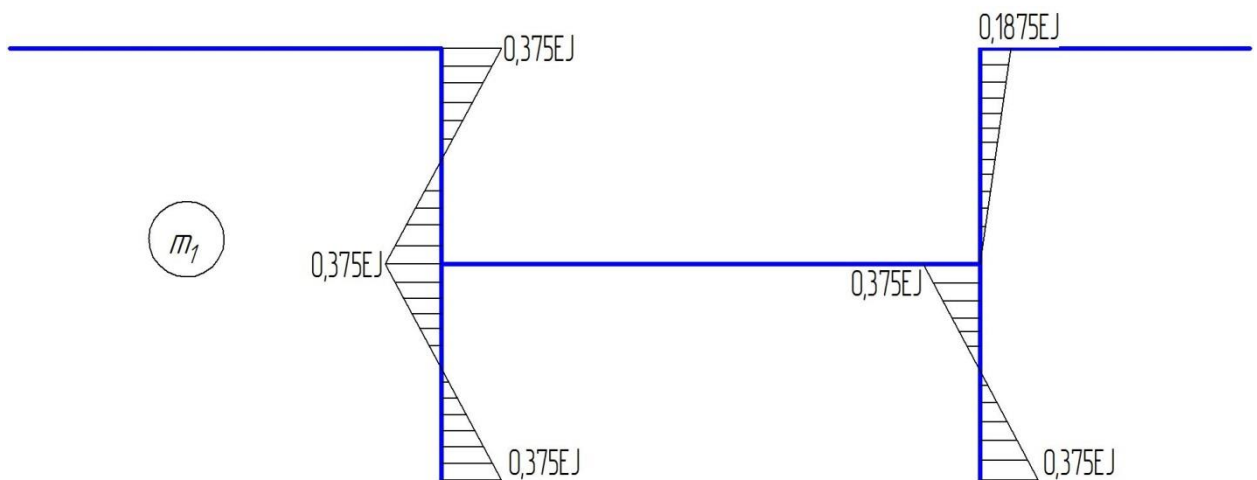
$$Q_9 = Q_8 = \frac{3EJ_c}{l_{9-8}^3} \Rightarrow Q_9 = Q_8 = \frac{3EJ}{4^3} = 0,0468EJ$$

стержень 8-3:

$$M_8 = M_3 = \frac{6EJ_c}{l_{8-3}^2} \leftarrow M_8 = M_3 = \frac{6EJ}{4^2} = 0,375EJ$$

$$Q_8 = Q_3 = \frac{12EJ_c}{l_{8-3}^3} \Rightarrow Q_8 = Q_3 = \frac{12EJ}{4^3} = 0,1875EJ$$

Строим эпюры единичного состояния $z_j=1$.



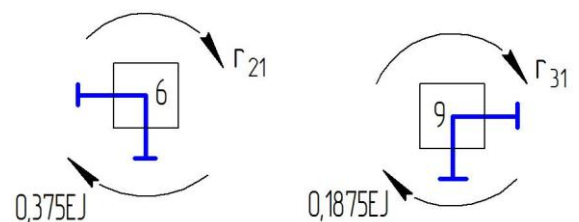
Определяем коэффициенты r_{21} и r_{31} из условия равновесия узлов 6 и 9:

$$\sum M_6 = 0; r_{21} + 0,375EJ = 0 \Rightarrow$$

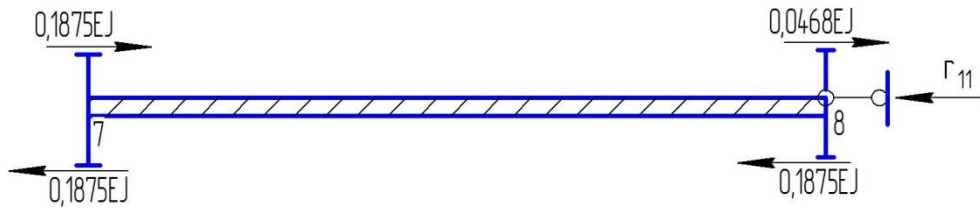
$$\Rightarrow r_{21} = -0,375EJ$$

$$\sum M_9 = 0; r_{31} + 0,1875EJ = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{31} = -0,1875EJ$$

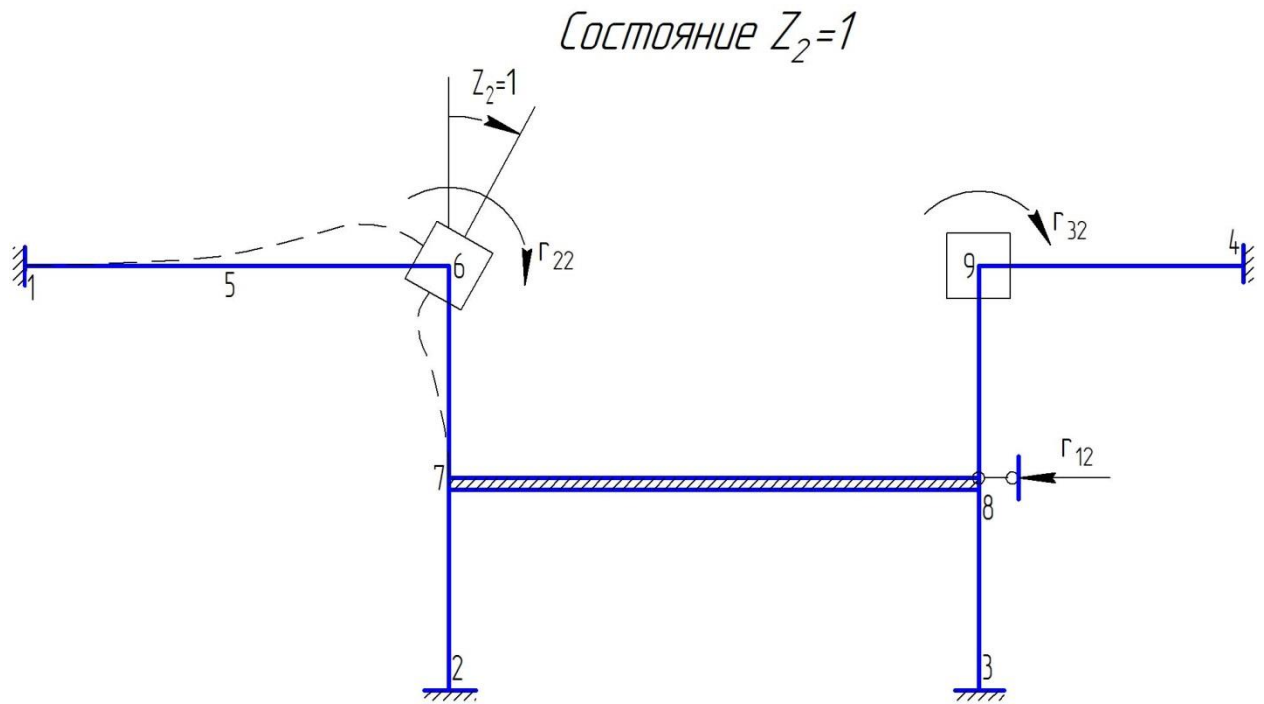


Коэффициент r_{11} определяем из следующего условия ригеля 7-8:



$$\sum X = 0; EJ(0,1875 - 0,1875 - 0,1875 + 0,0468) - r_{11} = 0 \Rightarrow r_{11} = -0,1407EJ$$

Рассмотрим состояние $z_2=1$.



стержень 1-6

$$M_6 = \frac{4EJ_p}{l_{1-6}} \Rightarrow M_6 = \frac{4 \cdot 2EJ}{8} = 1EJ$$

$$M_1 = \frac{2EJ_p}{l_{1-6}} \Rightarrow M_1 = \frac{2 \cdot 2EJ}{8} = 0,5EJ$$

$$Q_1 = Q_6 = -\frac{6EJ_p}{l_{1-6}^2} \Rightarrow Q_1 = Q_6 = -\frac{6 \cdot 2EJ}{8^2} = -0,1875EJ$$

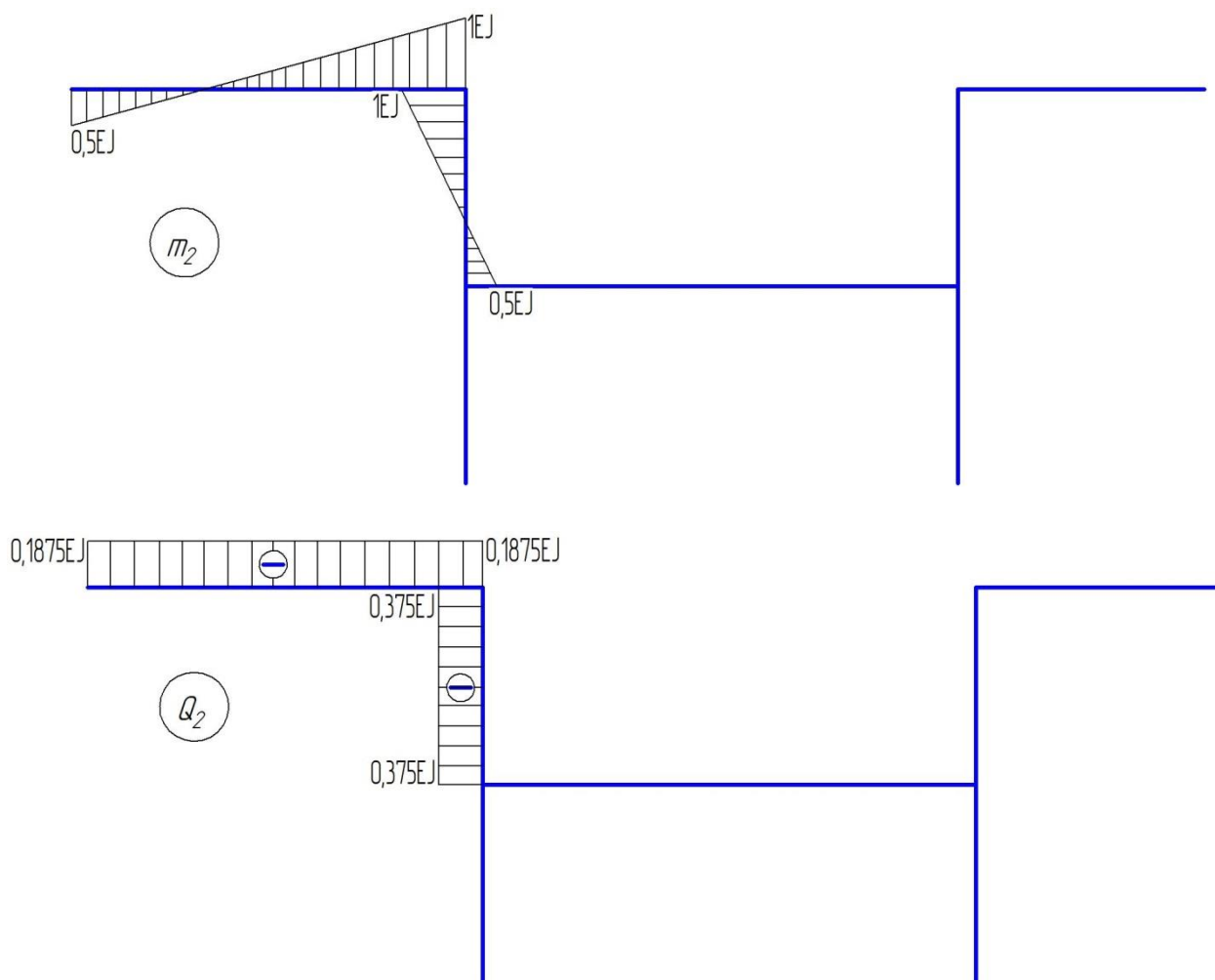
стержень 6-7

$$M_6 = \frac{4EJ_c}{l_{6-7}} \Rightarrow M_6 = \frac{4EJ}{4} = 1EJ$$

$$M_7 = \frac{2EJ_c}{l_{6-7}} \Rightarrow M_7 = \frac{2 \cdot EJ}{4} = 0,5EJ$$

$$Q_6 = Q_7 = -\frac{6EJ_c}{l_{6-7}^2} \Rightarrow Q_6 = Q_7 = -\frac{6EJ}{4^2} = -0,375EJ$$

Строим эпюры единичного состояния $z_2=1$.

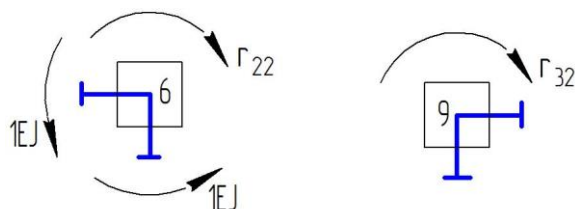


Определяем коэффициенты r_{21} и r_{31} из условия равновесия узлов 6 и 9:

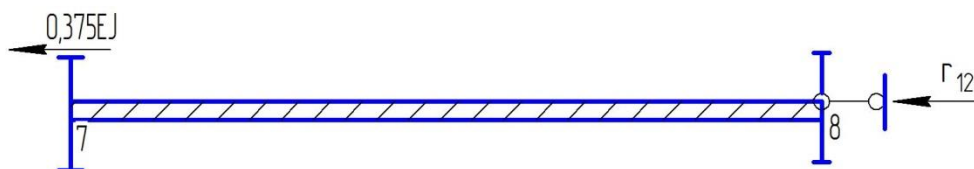
$$\sum M_6 = 0; r_{22} - 1EJ - 1EJ = 0 \Rightarrow$$

$$r_{22} = 2EJ$$

$$\sum M_9 = 0; r_{32} = 0$$



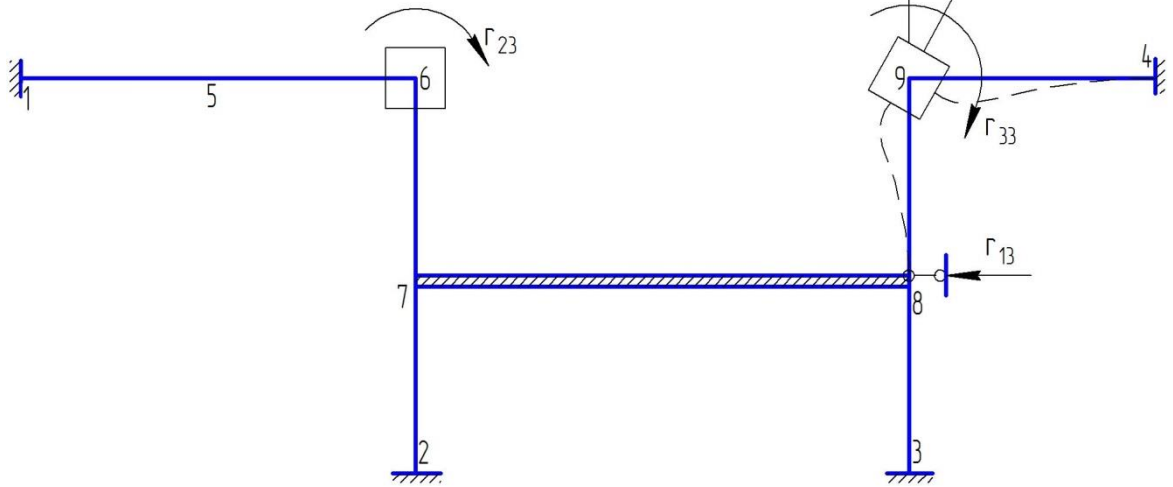
Коэффициент r_{12} определяем из следующего условия ригеля 7-8:



$$\sum X = 0; -0,375EJ - r_{21} = 0 \Rightarrow r_{12} = -0,375EJ$$

Рассмотрим состояние $z_3=1$.

Состояние $Z_3=1$



стержень 4-9

$$M_9 = \frac{4EJ_p}{l_{4-9}} \Rightarrow M_9 = \frac{4 \cdot 2EJ}{5} = 1,6EJ$$

$$M_4 = \frac{2EJ_p}{l_{4-9}} \Rightarrow M_4 = \frac{2 \cdot 2EJ}{5} = 0,8EJ$$

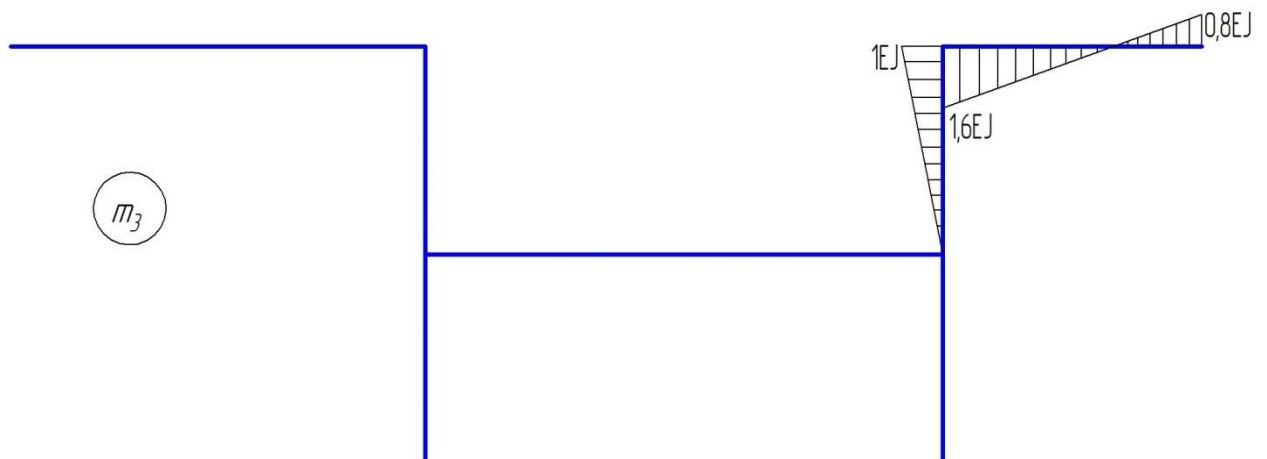
$$Q_4 = Q_9 = -\frac{6EJ_p}{l_{4-9}^2} \Rightarrow Q_4 = Q_9 = -\frac{6 \cdot 2EJ}{5^2} = -0,48EJ$$

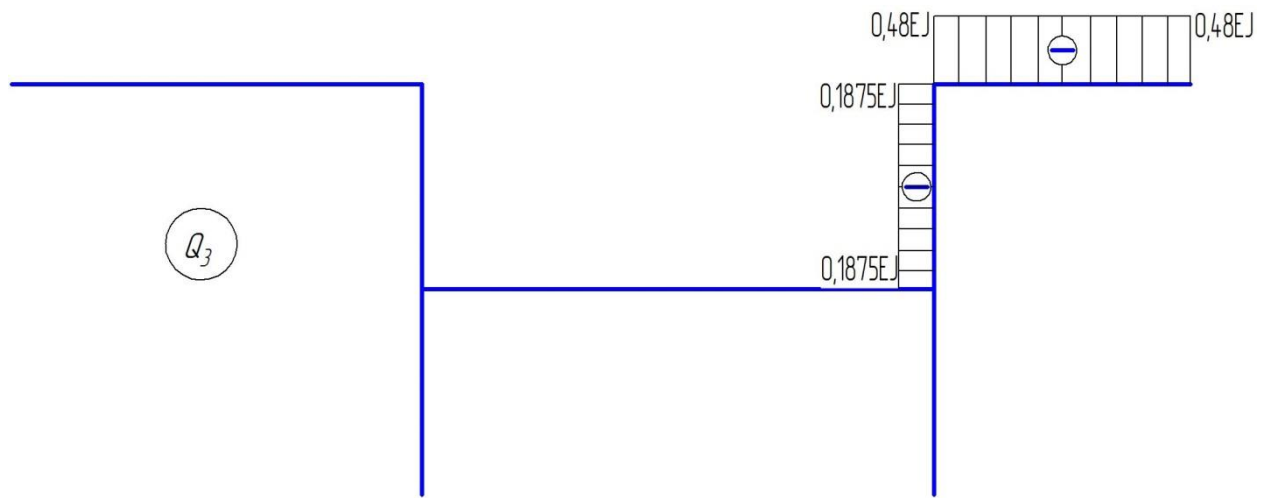
стержень 8-9

$$M_9 = \frac{3EJ_c}{l_{8-9}} \Rightarrow M_9 = \frac{4EJ}{4} = 1EJ$$

$$Q_8 = Q_9 = -\frac{3EJ_c}{l_{8-9}^2} \Rightarrow Q_8 = Q_9 = -\frac{3EJ}{4^2} = -0,1875EJ$$

Строим эпюры единичного состояния $z_3=1$.



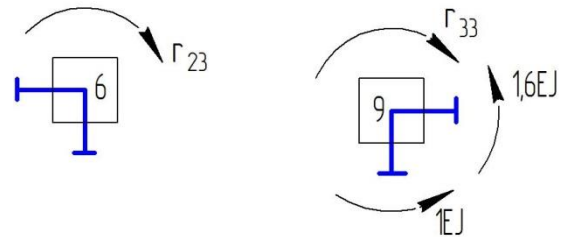


Определяем коэффициенты r_{23} и r_{33} из условия равновесия узлов 6 и 9:

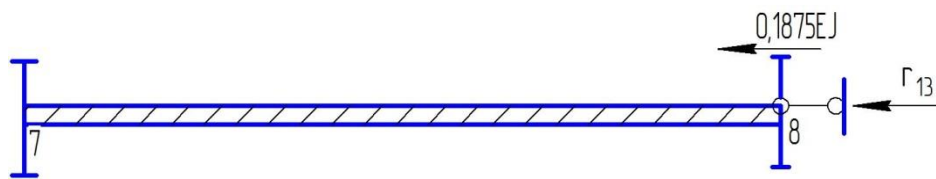
$$\sum M_6 = 0; r_{23} = 0$$

$$\sum M_9 = 0; r_{33} - 1EJ - 1,6EJ = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{33} = 2,6EJ$$



Коэффициент r_{21} определяем из следующего условия ригеля 7-8:



$$\sum X = 0; -0,1875EJ - r_{13} = 0 \Rightarrow r_{13} = -0,1875EJ$$

Подставляем найденные коэффициенты и решаем канонические уравнения (1.4)-(1.6):

$$0,6093EJ \cdot z_1 - 0,375EJ \cdot z_2 - 0,1875EJ \cdot z_3 = 0$$

$$-0,375EJ \cdot z_1 + 2EJ \cdot z_2 - 0 \cdot z_3 + 100 = 0$$

$$-0,1875EJ \cdot z_1 + 0 \cdot z_2 + 2,6EJ \cdot z_3 - 25 = 0$$

$$\text{Получаем: } z_1 = -\frac{32,27}{EJ}; z_2 = -\frac{56,05}{EJ}; z_3 = \frac{7,29}{EJ}$$

Проверка решения уравнений:

$$1) 0,6093 \cdot (-32,27) - 0,375 \cdot (-56,05) - 0,1875 \cdot 7,29 = -21,03 + 21,02 = -0,01$$

$$\text{неувязка: } \frac{0,01 \cdot 100}{62,91} = 0,02\% \text{ - незначительна}$$

$$2) -0,375 \cdot (-32,27) + 2 \cdot (-56,05) + 100 = -112,1 + 112,1 = 0$$

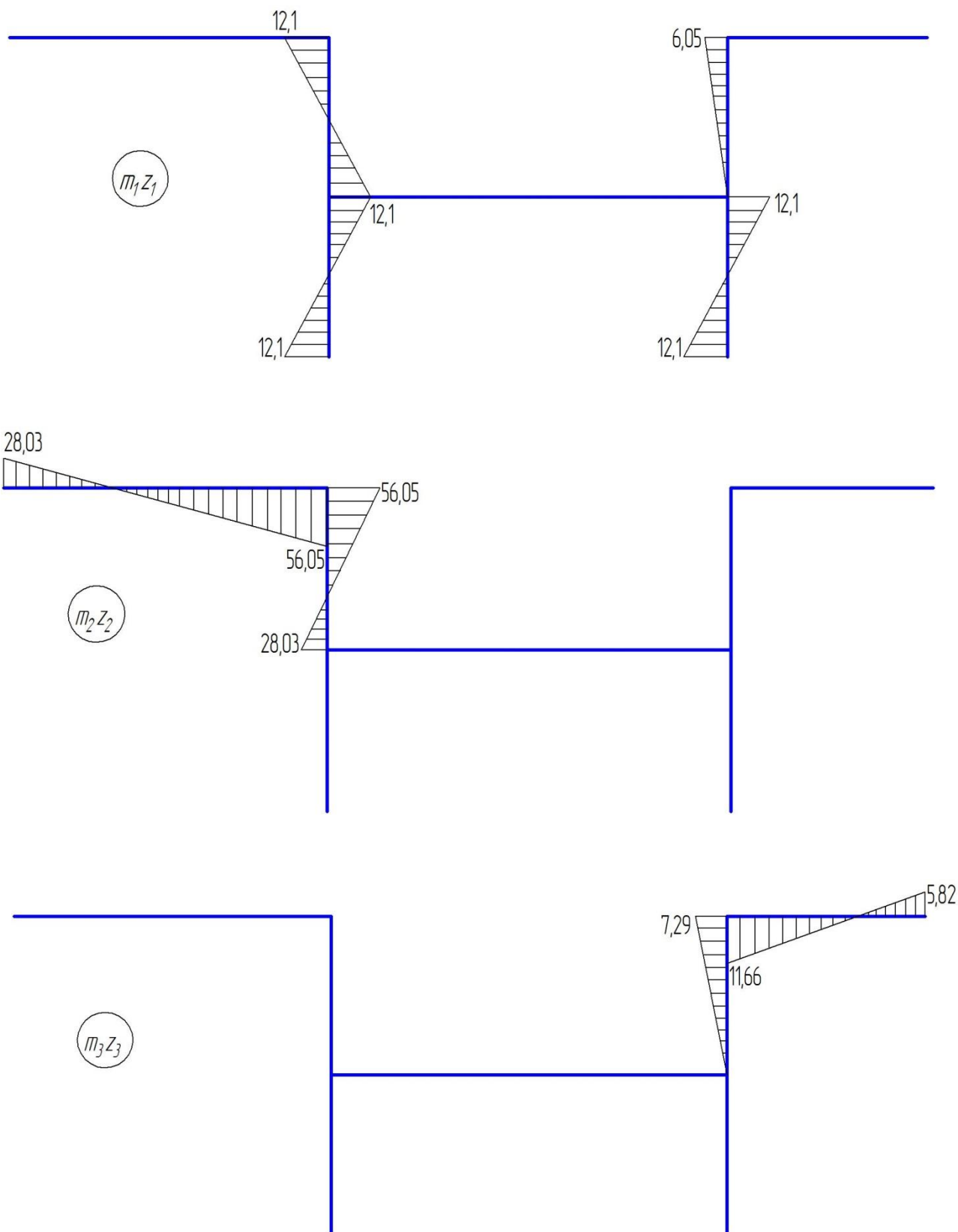
неувязки нет

$$3) -0,1875 \cdot (-32,27) + 0 \cdot (-56,05) + 2,6 \cdot 7,29 - 25 = 25 - 25 = 0$$

неувязки нет

3. Строим окончательную эпюру M , исходя из формулы:

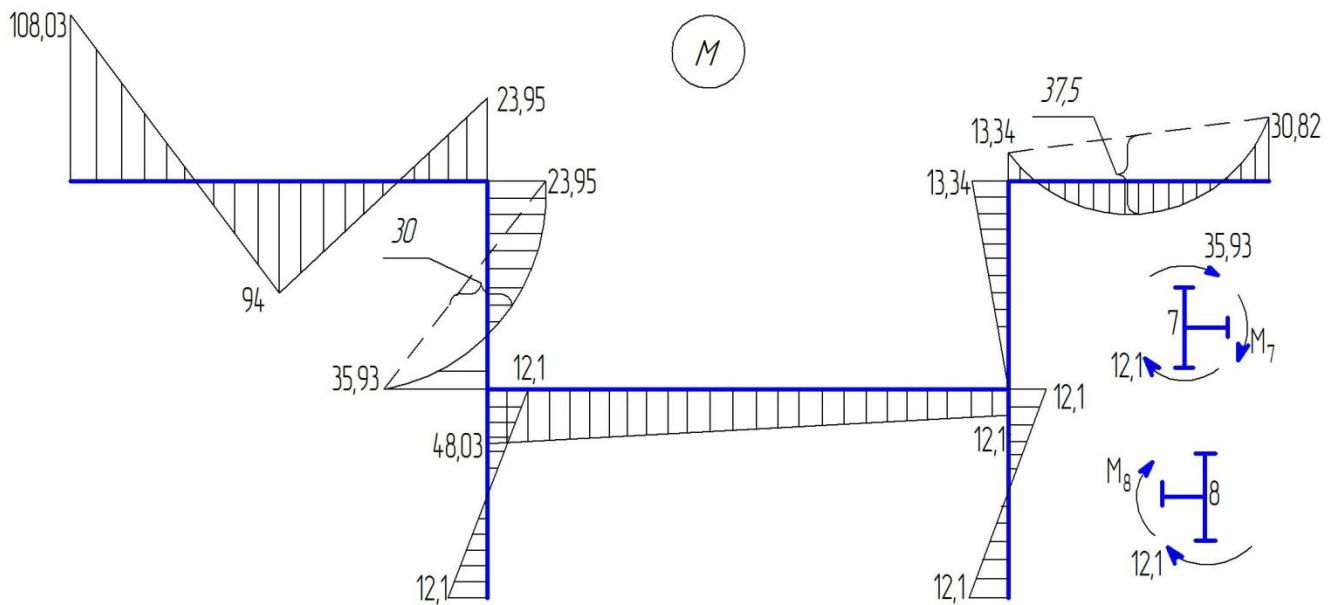
$$M = m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + M_p \quad (1.7)$$



По концам абсолютно жесткого стержня изгибающие моменты определяем

$$M_7 + 35,93 + 12,1 = 0 \Rightarrow M_7 = -48,03 \text{ (кНм)}$$

$$M_8 + 12,1 = 0 \Rightarrow M_8 = -12,1 \text{ (кНм)}$$



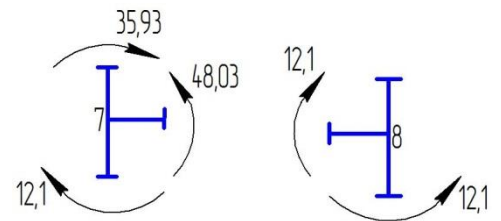
Проверим правильность решения уравнений (1.5)-(1.6) из условия равновесия узлов 7 и 8:

$$\sum M_7 = 0;$$

$$35,93 + 12,1 - 48,03 = 48,03 - 48,03 = 0$$

$$\sum M_8 = 0; \quad 12,1 - 12,1 = 0$$

Уравнения решены верно.



4. Определяем поперечные силы Q для стержней из окончательной эпюры M и строим окончательную эпюру Q .

Для стержня 1-5: $\sum M_1 = 0; Q_{51} \cdot 4 - 108,03 - 94 = 0 \Rightarrow Q_{51} = 50,5$ (кН)

Для стержня 5-6: $\sum M_6 = 0; Q_{56} \cdot 4 + 94 + 23,95 = 0 \Rightarrow Q_{56} = -29,5$ (кН)

Для стержня 6-7: $\sum M_6 = 0; Q_{76} \cdot 4 - 15 \cdot 4 \cdot 2 - 23,95 - 35,93 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow Q_{76} = 45,1$ (кН)

$\sum M_7 = 0; Q_{67} \cdot 4 + 15 \cdot 4 \cdot 2 - 23,95 - 35,93 = 0 \Rightarrow Q_{67} = -15,03$ (кН)

Для стержня 7-2: $\sum M_2 = 0; Q_{72} \cdot 4 - 12,1 - 12,1 = 0 \Rightarrow Q_{72} = 6,05$ (кН)

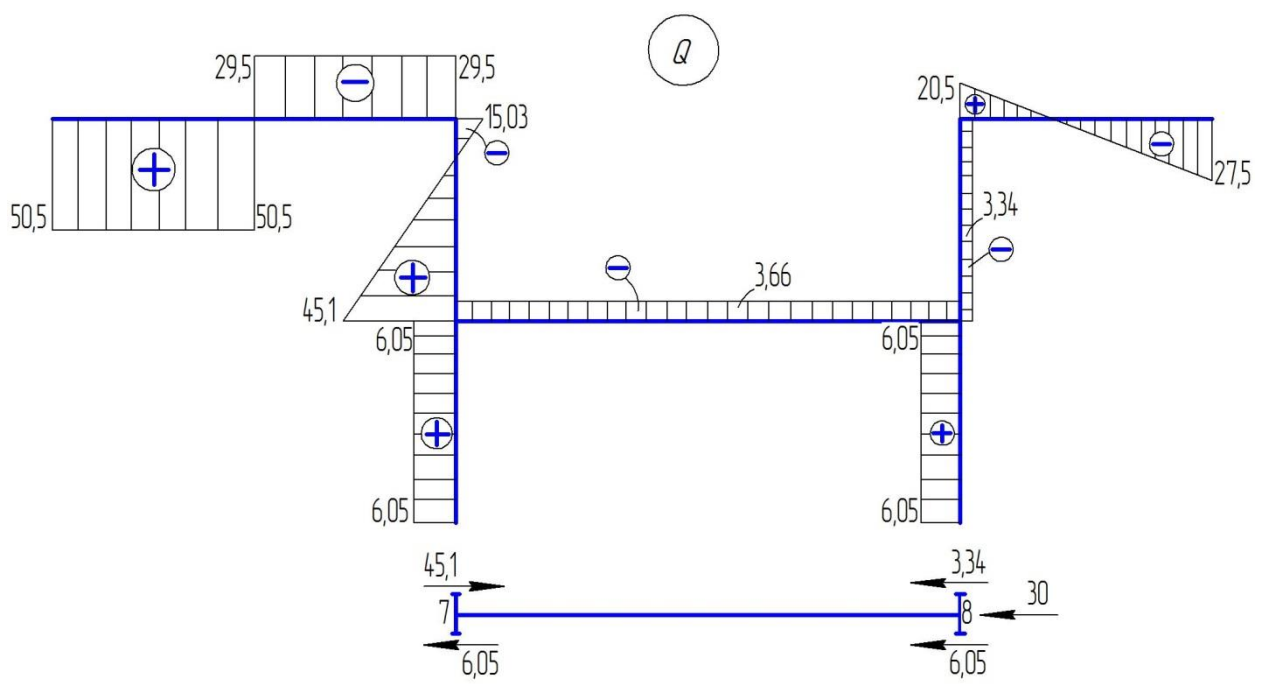
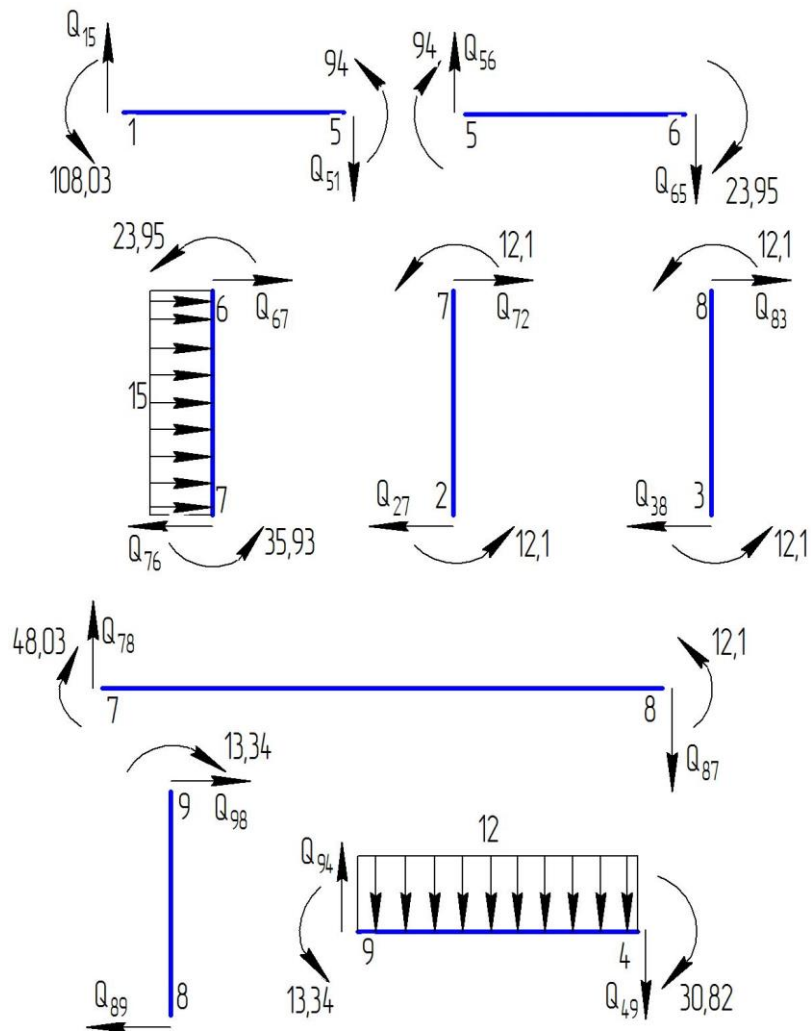
Для стержня 7-8: $\sum M_7 = 0; Q_{87} \cdot 10 + 48,03 - 12,1 = 0 \Rightarrow Q_{87} = -3,6$ (кН)

Для стержня 8-3: $\sum M_2 = 0; Q_{72} \cdot 4 - 12,1 - 12,1 = 0 \Rightarrow Q_{72} = 6,05$ (кН)

Для стержня 8-9: $\sum M_9 = 0; Q_{89} \cdot 4 + 13,34 = 0 \Rightarrow Q_{89} = -3,34$ (кН)

Для стержня 9-4: $\sum M_9 = 0; Q_{49} \cdot 5 + 30,82 + 12 \cdot 5 \cdot 2 - 13,34 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow Q_{49} = -27,5$ (кН)

$\sum M_4 = 0; Q_{94} \cdot 5 - 12 \cdot 5 \cdot 2 + 30,82 - 13,34 = 0 \Rightarrow$ (кН)
 $\Rightarrow Q_{94} = 20,5$ (кН)

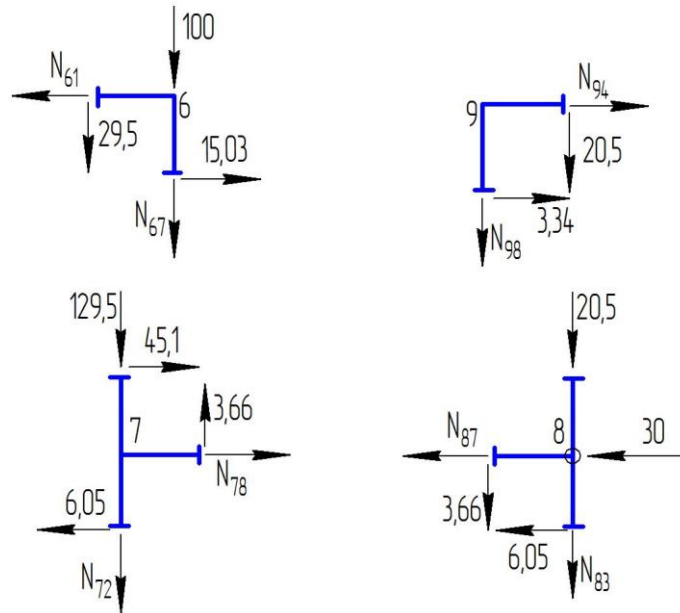


Проверяем условие равновесия жесткого стержня и решения канонического уравнения (1.4):

$$\sum X = 0; 45,1 - 6,05 - 6,05 - 3,34 - 30 = -0,34 \approx 0$$

Условие выполняется.

5. Для построения окончательной эпюры N продольные силы определяем из условия равновесия узлов:



Для узла 6: $\sum X = 0; -N_{61} + 15,03 = 0 \Rightarrow N_{61} = 15,03 \text{ (кН)}$

$\sum Y = 0; -N_{67} - 29,5 - 100 = 0 \Rightarrow N_{67} = -129,5 \text{ (кН)}$

Для узла 7: $\sum X = 0; N_{78} - 6,05 + 45,1 = 0 \Rightarrow N_{78} = -39,05 \text{ (кН)}$

$\sum Y = 0; -N_{72} - 129,5 + 3,66 = 0 \Rightarrow N_{72} = -125,84 \text{ (кН)}$

Для узла 9: $\sum X = 0; N_{94} + 3,34 = 0 \Rightarrow N_{94} = -3,34 \text{ (кН)}$

$\sum Y = 0; -N_{98} - 20,5 = 0 \Rightarrow N_{98} = -20,5 \text{ (кН)}$

Для узла 8: $\sum X = 0; -N_{87} - 30 - 6,05 = 0 \Rightarrow N_{87} = -36,05 \text{ (кН)}$

$\sum Y = 0; -N_{83} - 3,66 - 20,5 = 0 \Rightarrow N_{83} = -24,16 \text{ (кН)}$