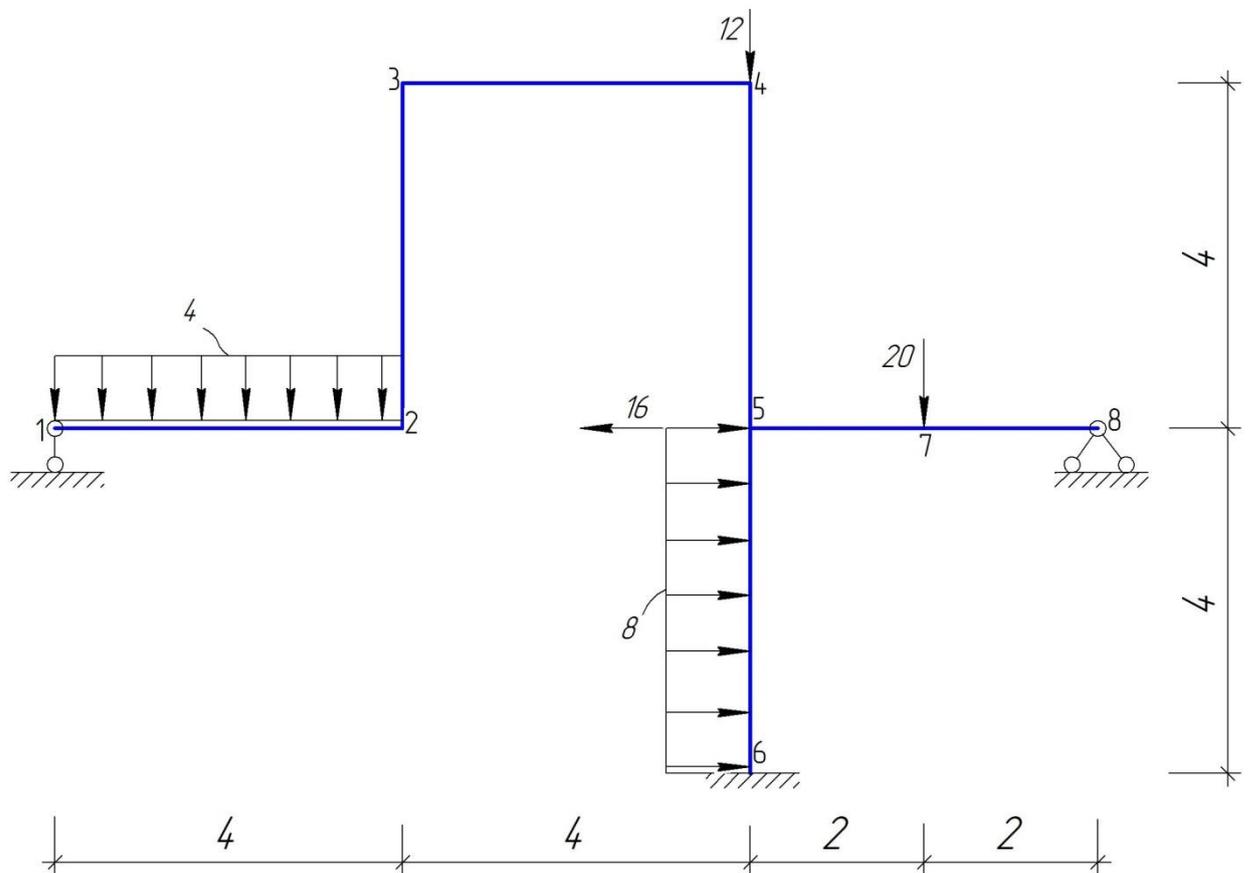


Исходные данные:

$$J_p=2J_c; J_p=2J, J_c=J$$

Расчетная схема (1:75)



Расчет:

1. Определяем степень статической неопределимости с помощью приемов кинематического анализа, найдем число степеней свободы:

$$W = 3D + 2U - 2Ш - C - C_o \quad (1.1)$$

где, D – число дисков; U – число узлов; $Ш$ – число однократных шарниров; C – число стержней (для ферм); C_o – число опорных связей.

Отсюда, исходя из схемы рамы:

$$W = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 0 - 6 = -3$$

Так как система не имеет замкнутых контуров, то число лишних связей $L=3$. Таким образом, система имеет 3 лишние связи, т.е. структура заданной системы является три раза статически неопределимой.

Степень кинематической неопределимости определяется по формуле:

$$K = K_{лин} + K_{угл} \quad (1.2)$$

Где, $K_{лин}$ – линейные перемещения системы; $K_{угл}$ – угловые перемещения системы.

Отсюда, в нашей расчетной схеме возможны линейные перемещения 3-х ригелей:

- ригель 1-2 и 3-4 – горизонтально;
- ригель 2-3 – вертикально.

Проверим линейные перемещения, исходя из формулы:

$$W = 2U - C - C_o \quad (1.3)$$

Где, U – число узлов (включая опорные); C – число стержней; C_o – число опорных стержней.

Отсюда:

$$W = 2 \cdot 8 - 6 - 7 = 3$$

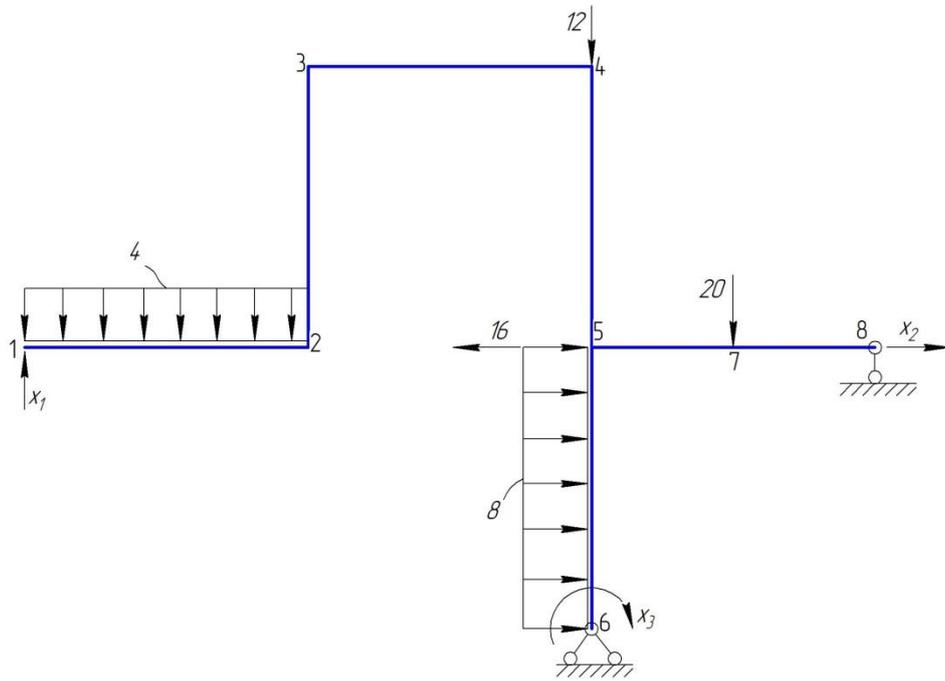
Так как жестких углов в рассматриваемой системе – 4, то количество возможных угловых перемещений равно 4.

Таким образом, степень кинематической неопределимости равна:

$$K = 4 + 3 = 7$$

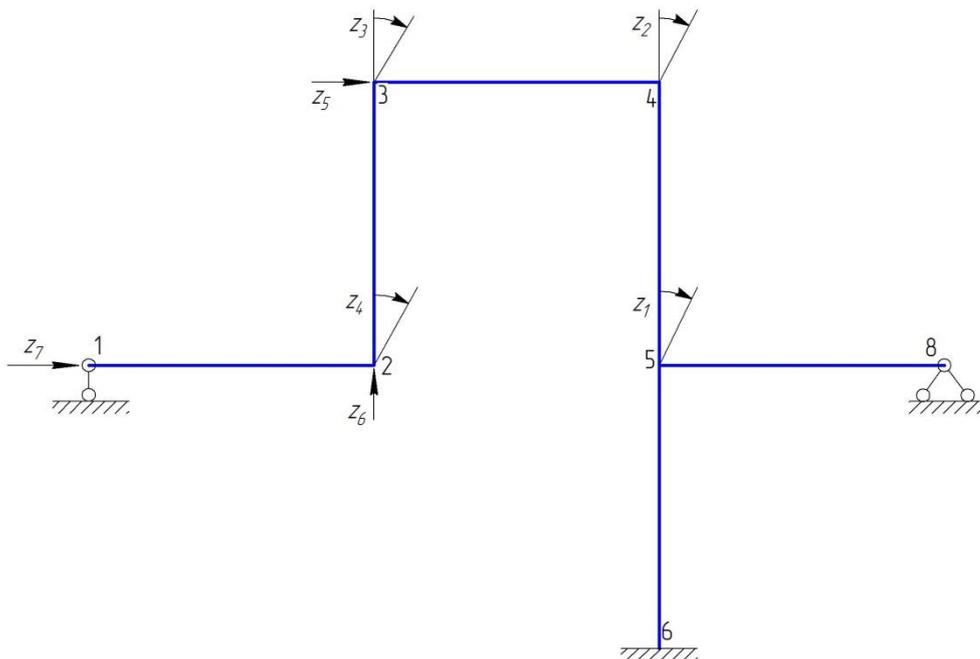
Определяем основную систему метода сил.

Основная система метода сил



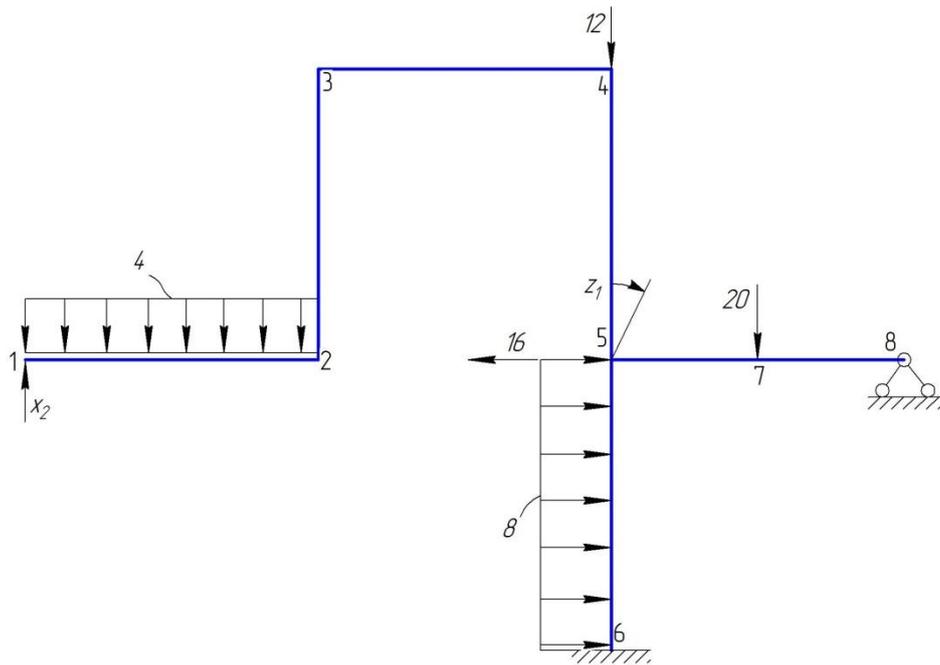
Определяем основную систему метода перемещений

Основная система метода перемещений



Исходя из целесообразности, определяем основную систему смешанного метода.

Основная система смешанного метода



2. Основные канонические уравнения и разрешающие условия имеют вид:

$$R_1 = 0; r_{11}z_1 + r'_{12}x_2 + R_{1p} = 0 \quad (1.4)$$

$$\Delta_2 = 0; \delta'_{12}z_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2p} = 0 \quad (1.5)$$

В нашем случае механический смысл уравнения (1.4) заключается в том, что оно отрицает реакцию в первой связи основной системы по направлению первого неизвестного z_1 от заданной нагрузки, кинематического неизвестного z_1 и силового неизвестного x_2 . Второе уравнение (1.5) отрицает перемещение в основной системе по направлению второго неизвестного x_2 от заданной нагрузки, кинематического неизвестного z_1 и силового неизвестного x_2 .

Рассмотрим состояние $z_1=1$ и построим эпюру m_1 :

стержень 5-6:

$$M_5 = \frac{4EJ_c}{l_{5-6}} = \frac{4EJ}{4} =$$

$$= 1EJ$$

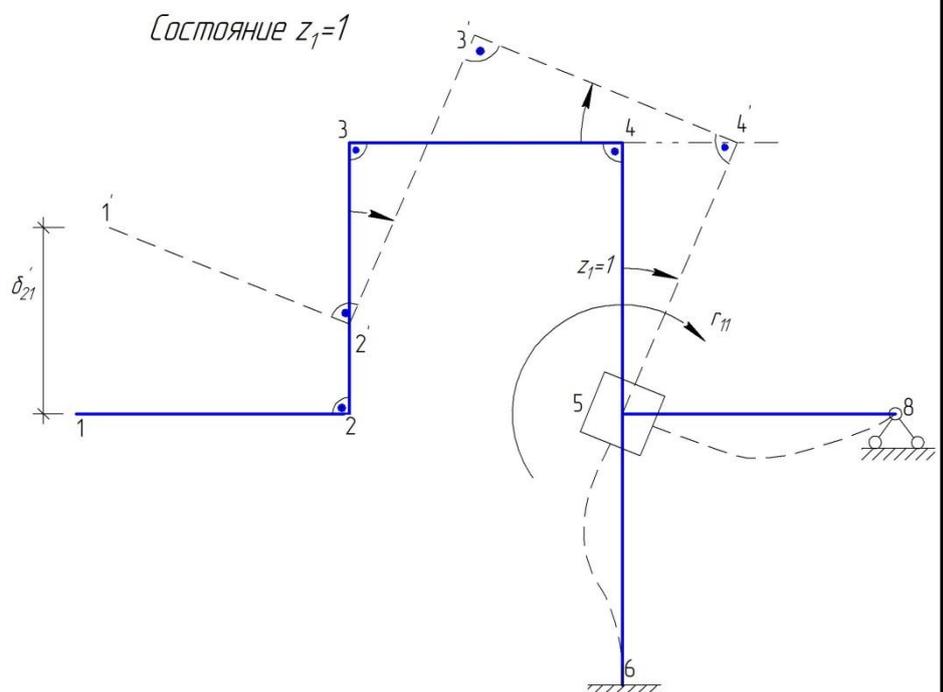
$$M_6 = \frac{2EJ_c}{l_{5-6}} = \frac{2EJ}{4} =$$

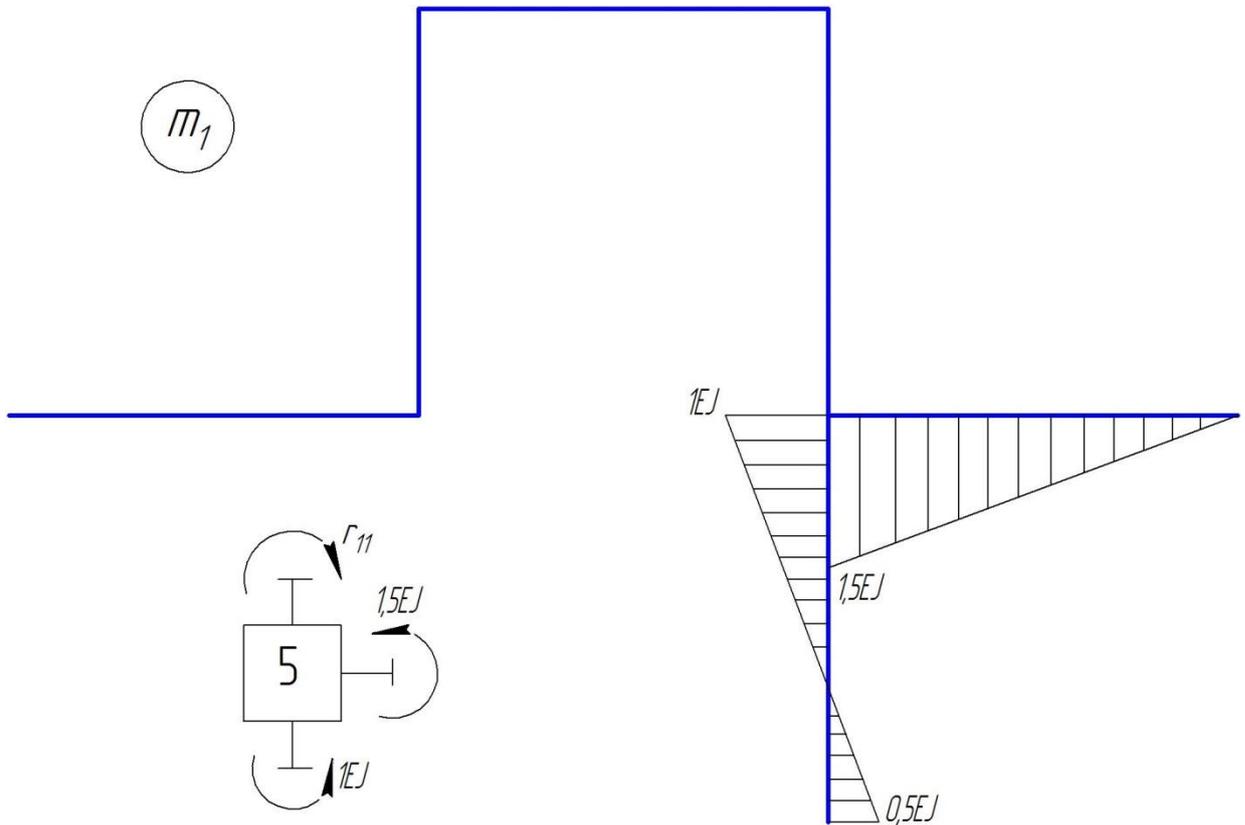
$$= 0,5EJ$$

стержень 5-8

$$M_5 = \frac{3EJ_p}{l_{5-8}} = \frac{2 \cdot 3EJ}{4} =$$

$$= 1,5EJ; \quad M_8 = 0$$





Определяем коэффициент r_{11} из условия равновесия узла 5:

$$\sum M_5 = 0; r_{11} - EJ(1,5 + 1) = 0 \Rightarrow r_{11} = 2,5EJ$$

Определяем единичное перемещение δ'_{21} . При повороте узла 5 на угол $z_1=1$ пренебрегаем перемещением точек 2 и 4 по дуге окружности и предполагаем, что точка 2 перемещается в точку 2' вертикально, а точка 4 в точку 4' горизонтально. При этом углы между прямыми 5-4 и 5-4', 3-4 и 3'-4', 2-3 и 2'-3', а также 1-2 и 1'-2' равны между собой и равны углу $z_1=1$. Перемещение точки 1' по вертикали, т.е. по направлению действия силы x_2 , равно углу поворота $z_1=1$, умноженному на плечо 1-4, т.е. $\delta'_{21} = 1 \cdot 8 = 8$ (м).

Рассмотрим состояние $x_2=1$, построим эпюру m_2 .

стержень 1-2

$(0 \leq x \leq 4 \text{ м})$

$m_2 = 1 \cdot x; m_2(0) = 0;$

$m_2(4) = 1 \cdot 4 = 4$ (м).

стержень 2-3

$(0 \leq y \leq 4 \text{ м})$

$m_2 = 1 \cdot 4 = 4$ (м).

стержень 3-4

$(4 \leq x \leq 8 \text{ м})$

$m_2 = 1 \cdot x;$

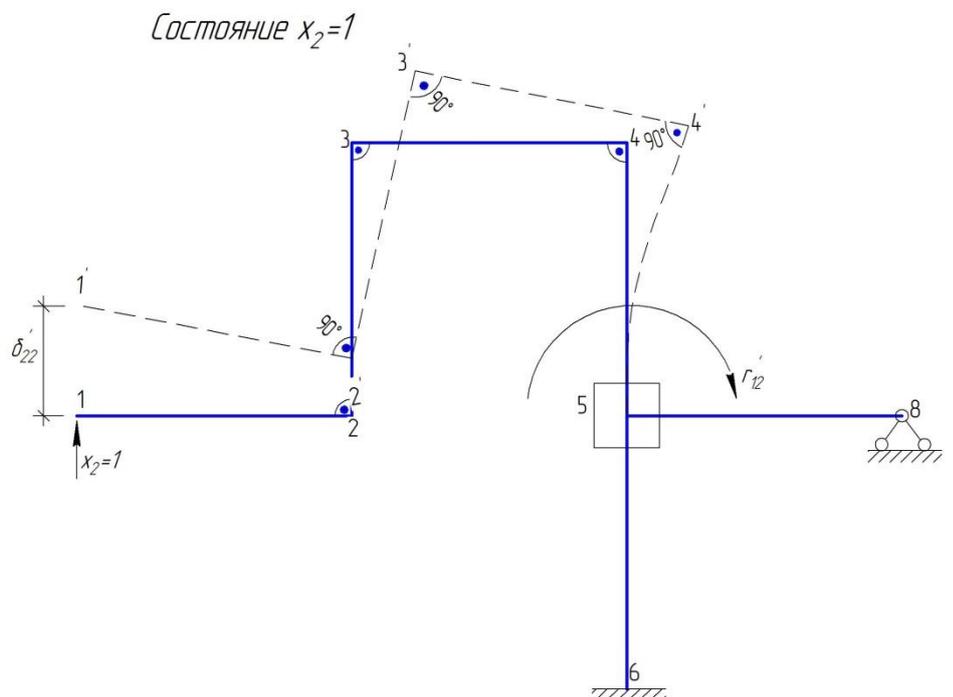
$m_2(4) = 1 \cdot 4 = 4$ (м);

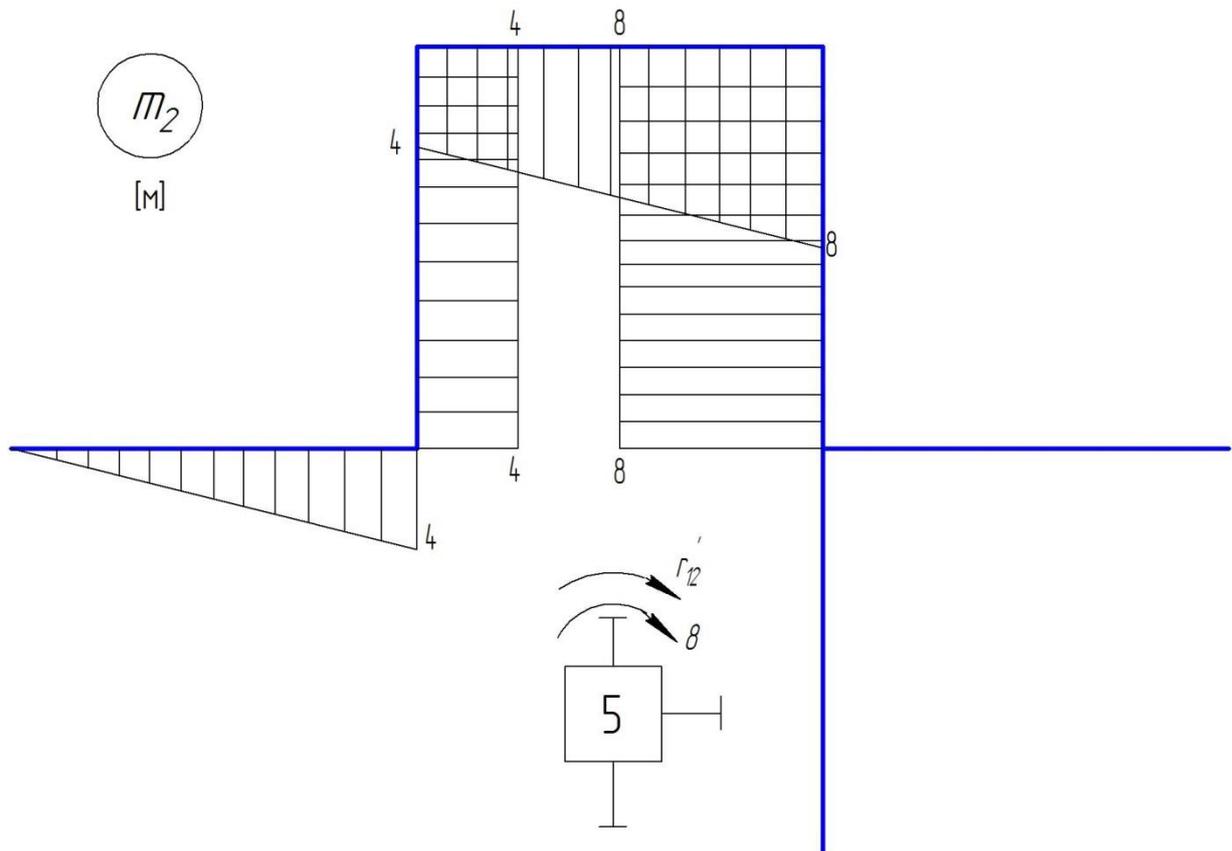
$m_2(8) = 1 \cdot 8 = 8$ (м).

стержень 4-5

$(0 \leq y \leq 4 \text{ м})$

$m_2 = 1 \cdot 8 = 8$ (м)





Определяем коэффициент r_{12}' как реактивную тягу в наложенной связи из равновесия узла 5:

$$\sum M_5 = 0; r_{12}' + 8 = 0 \Rightarrow r_{12}' = -8 \text{ (м)}$$

Таким образом, согласно теореме о взаимности реакций и перемещений, получили: $\delta_{21}' = -r_{12}'$

Определяем коэффициент δ_{22} из правила Верещагина:

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{m_2^2 ds}{EJ} \quad (1.6)$$

Отсюда:

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + 4 \cdot 8 \cdot 8 \right) = \frac{490,64}{EJ}$$

3. Вычисляем ординаты эпюры M_p от действия заданных нагрузок.

стержень 1-2 ($0 \leq x \leq 4$ м)

$M_p = 4 \cdot x^2 / 2$; $M_p(0) = 0$; $M_p(2\text{м}) = 8$ (кНм); $M_p(4\text{м}) = 32$ (кНм).

Определим f -стрелку:

$f = q \cdot l^2 / 8 = 4 \cdot 4^2 / 8 = 8$ (кНм)

стержень 2-3 ($0 \leq y \leq 4$ м)

$M_p = 32$ (кНм) – на всем участке.

стержень 3-4 ($0 \leq x \leq 4$ м)

$M_p = 16 \cdot (x+2)$; $M_p(0) = 32$ (кНм); $M_p(4\text{м}) = 96$ (кНм);

стержень 4-5 ($0 \leq y \leq 4 \text{ м}$)

$$M_p = 16 \cdot 6 = 96 \text{ (кНм)} - \text{ на}$$

всем участке.

стержень 5-6

$$M_5 = M_6 = ql^2_{5-6} / 12 =$$

$$= 8 \cdot 4^2 / 12 = 10,7 \text{ (кНм)}$$

Определим f -стрелку:

$$f = q \cdot l^2 / 8 =$$

$$= 8 \cdot 4^2 / 8 = 16 \text{ (кНм)}$$

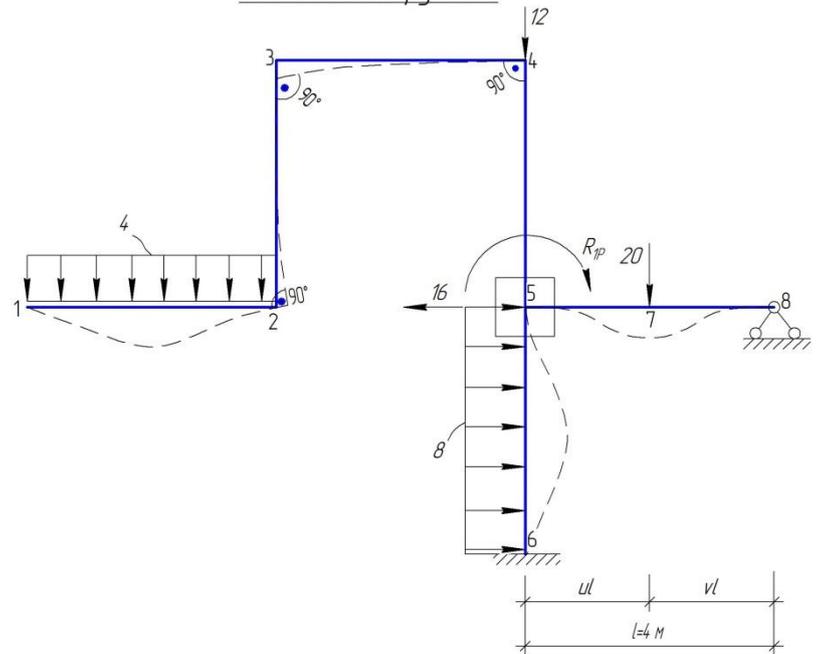
стержень 5-7-8

($u=1/2$; $v=1/2$)

$$M_5 = u^2 \cdot vPl_{5-8} = (1/2)^2 \cdot 1/2 \cdot 20 \cdot 4 =$$

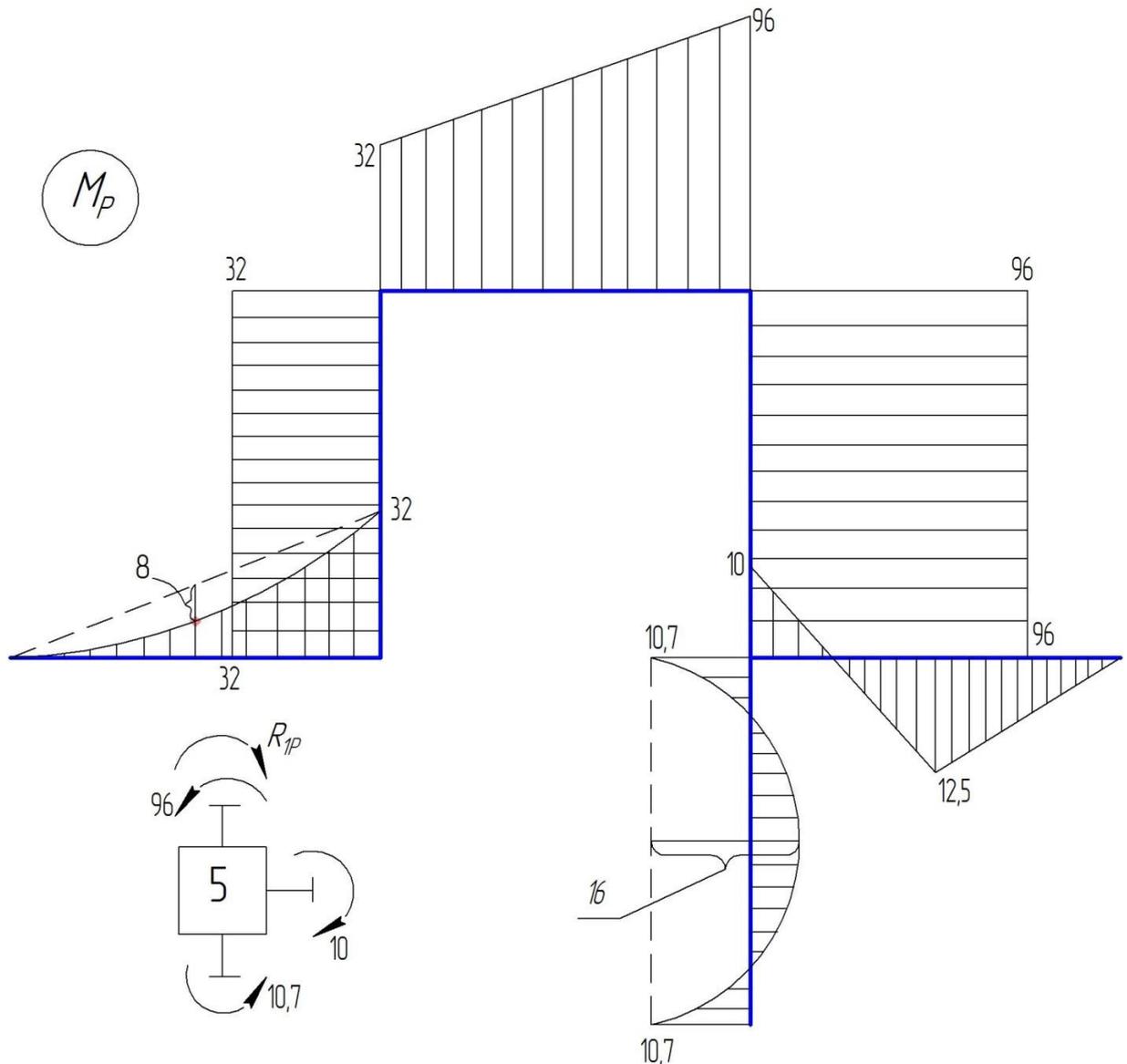
$$= 10 \text{ (кНм)}$$

Схема под нагрузками



$$M_7 = \frac{20 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(3 - \frac{1}{2}\right) = 12,5 \text{ (кНм)}$$

Строим эпюру M_p .

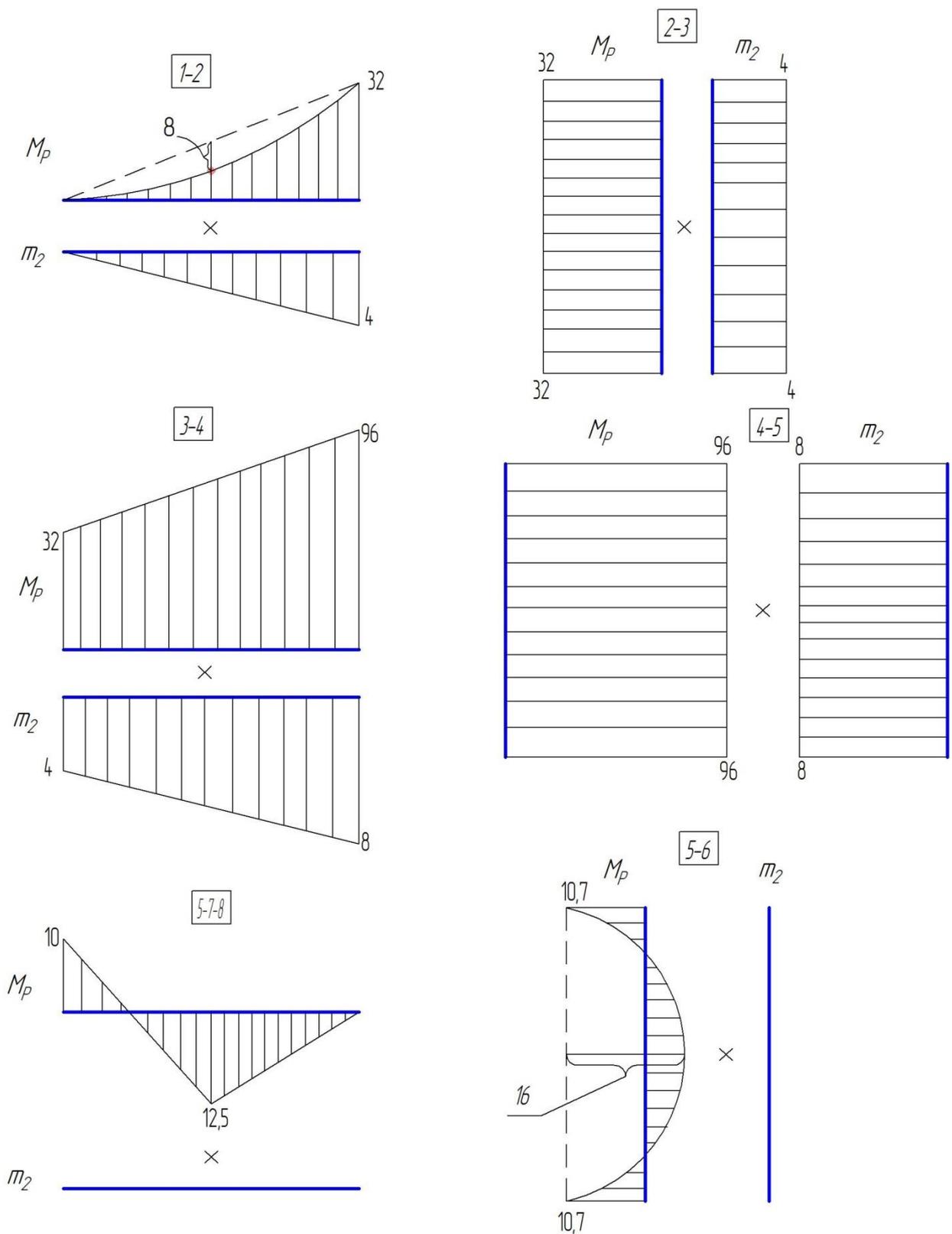


Определяем свободный член канонического уравнения (1.4) R_{1P} из уравнения равновесия узла 5:

$$\sum M_6 = 0; R_{1P} - 96 + 10 - 10,7 = 0 \Rightarrow R_{1P} = 96,7 \text{ (кНм)}$$

Свободный член канонического уравнения (1.5) определяем по правилу Верещагина:

$$\Delta_{2P} = \sum \int \frac{M_P \cdot m_2 ds}{EJ} \quad (1.7)$$



Наименование стержней	Участки эпюр		Произведение, (кНм ³)
	Площади участков эпюры М _p , (кНм ²)	Ординаты эпюры m ₂ , (м)	
1-2	$\frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 4 = 64$	$-\frac{2}{3} \cdot 4 = -2,67$	-170,9
	$-\frac{4 \cdot 4^3}{12} = -21,3$	$-\frac{1}{2} \cdot 4 = -2$	42,6
2-3	$32 \cdot 4 = 128$	-4	-512
3-4	$\frac{1}{2} \cdot 96 \cdot 4 = 192$	$-\frac{2}{3} \cdot 8 = -5,33$	-1023,36
	$\frac{1}{2} \cdot 96 \cdot 4 = 192$	$-\frac{1}{3} \cdot 4 = -1,33$	-255,36
	$\frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 4 = 64$	$-\frac{1}{3} \cdot 8 = -2,67$	-170,9
	$\frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 4 = 64$	$-\frac{2}{3} \cdot 4 = -2,67$	-170,9
4-5	$96 \cdot 4 = 384$	-8	-3072
		$\Sigma M_{pm_2 ds} =$	-5332,82

Отсюда:
$$\Delta_{2P} = -\frac{5332,82}{EJ}$$

Решаем систему канонических уравнений (1.4) и (1.5):

$$\begin{cases} 2,5EJ \cdot z_1 + (-8) \cdot x_2 + 96,7 = 0 \\ 8 \cdot z_1 + \frac{490,64}{EJ} \cdot x_2 - \frac{5332,82}{EJ} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = -\frac{3,71}{EJ} \\ x_2 = 10,93 \text{ кН} \end{cases}$$

Проверка решений:

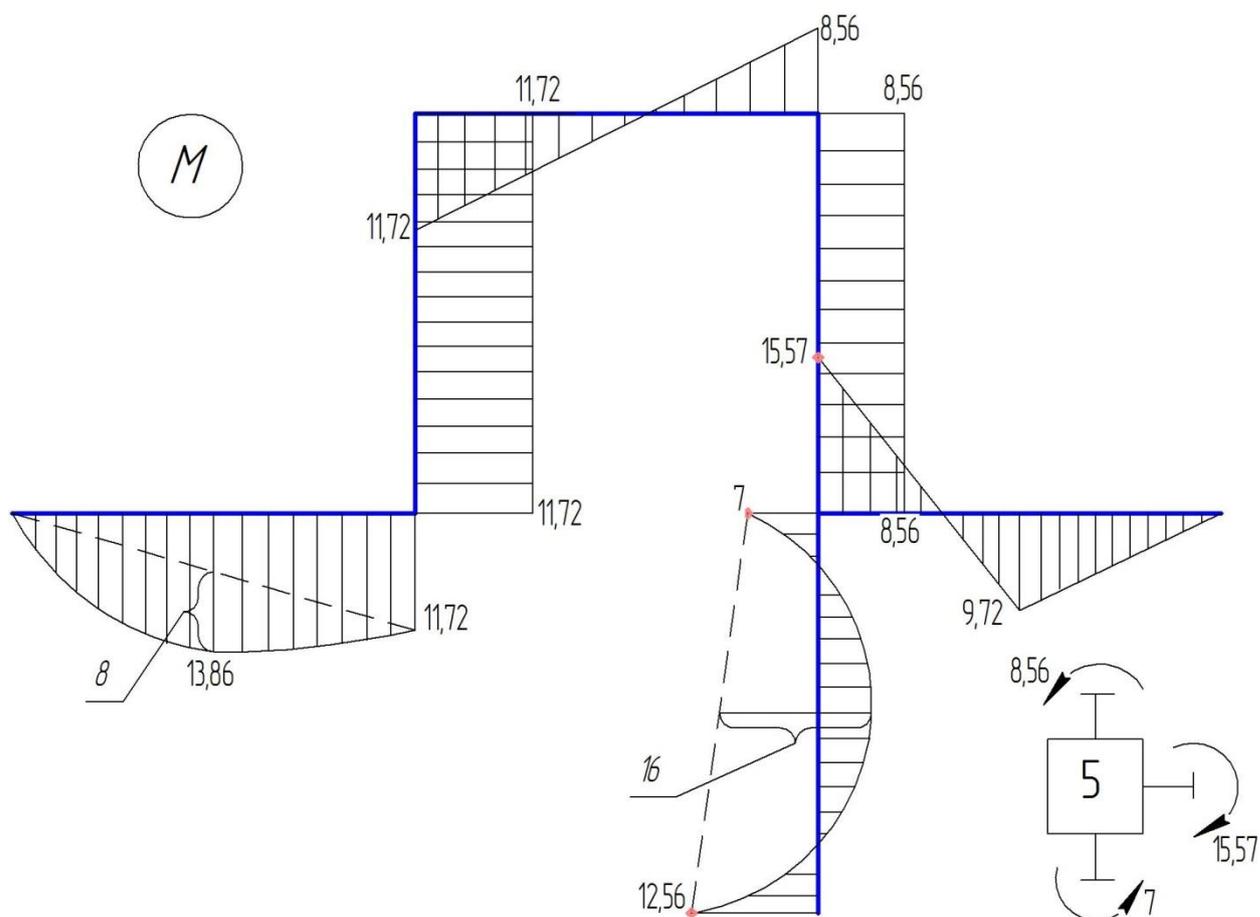
$$2,5EJ \cdot \left(-\frac{3,71}{EJ}\right) + (-8) \cdot 10,93 + 96,7 = -0,02 \Rightarrow \frac{-0,02 \cdot 100\%}{96,7} = 2 \cdot 10^{-2} < 3\%$$

$$8 \cdot \left(-\frac{3,71}{EJ}\right) + \frac{490,64}{EJ} \cdot 10,93 - \frac{5332,82}{EJ} = 0,2 \Rightarrow \frac{0,2 \cdot 100\%}{5332,82} = 3,7 \cdot 10^{-3} < 3\%$$

Неувязки незначительны.

4. Строим окончательную эпюру M , исходя из формулы:

$$M = m_1 z_1 + m_2 x_2 + M_p \quad (1.8)$$



Проверка правильности решения канонического уравнения (1.4):

$$\sum M_5 = 0; \quad -8,56 - 7 + 15,57 = -15,56 + 15,57 \approx 0 \Rightarrow \text{Верно}$$

5. Сделаем кинематическую проверку, для чего рассмотрим единичное состояние метода сил x_1 , определим реакции опор и построим эпюру m_3 .

Реакции опор:

Основная система метода сил

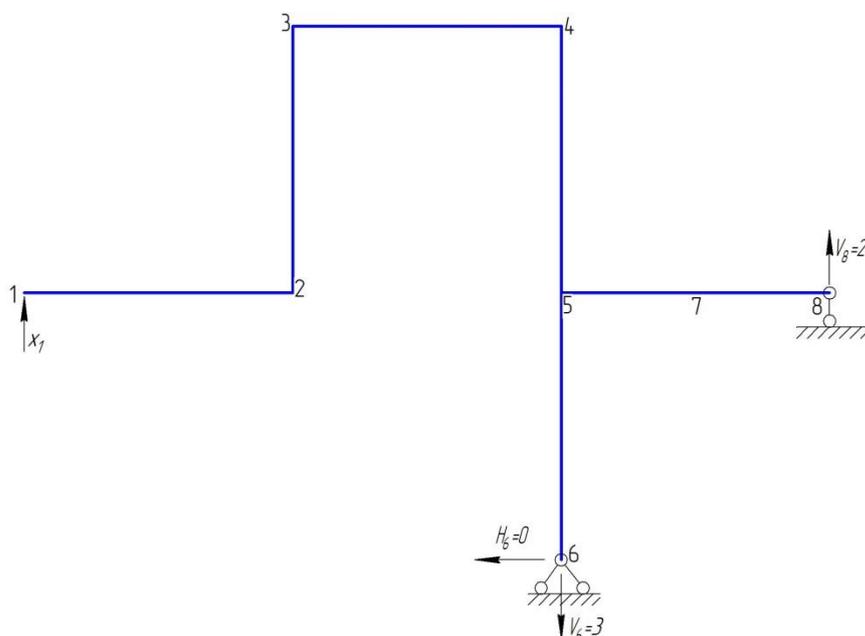
$$\sum X = 0$$

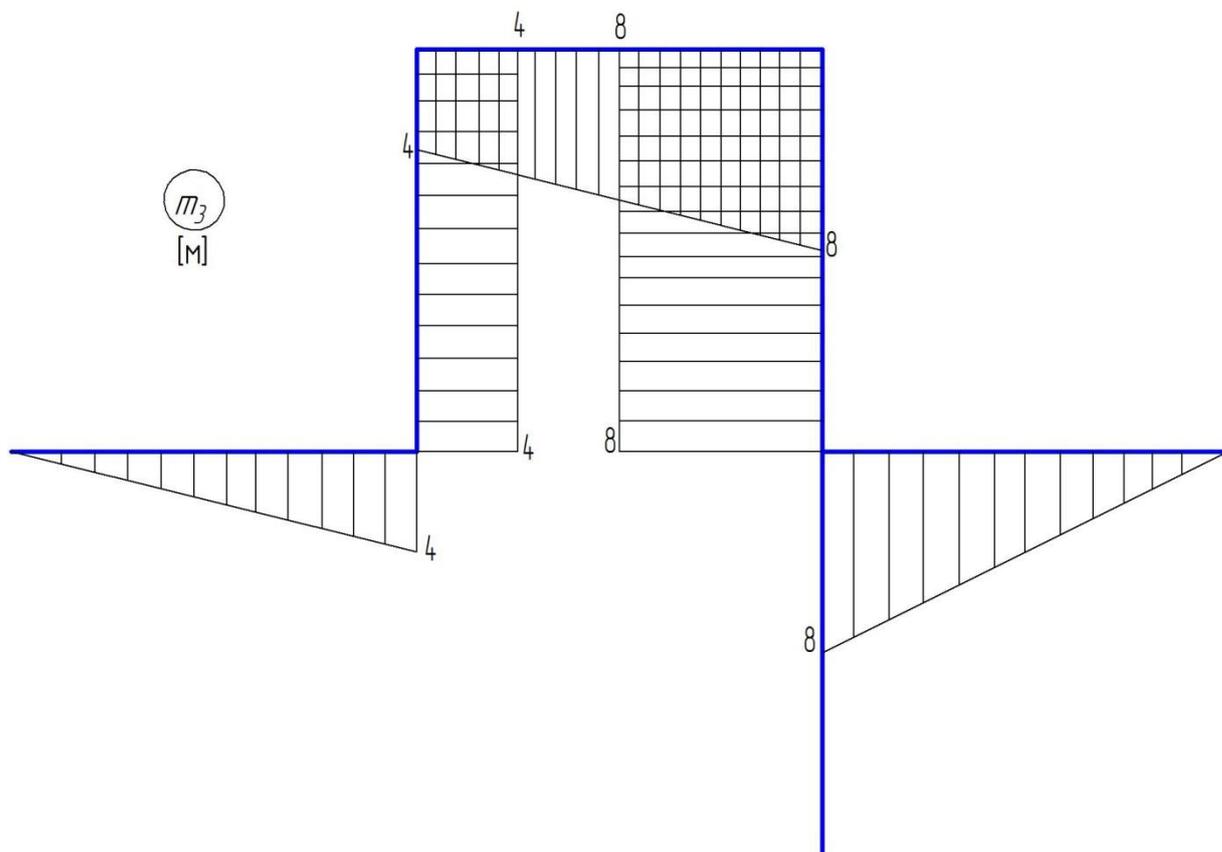
$$\sum Y = 0; \quad 1 - V_6 + V_8 = 0$$

$$\sum M_6 = 0; \quad 1 \cdot 8 + V_8 \cdot 4 = 0$$

$$V_8 = 8 / 4 = 2$$

$$V_6 = 1 + 2 = 3$$





Из формулы:

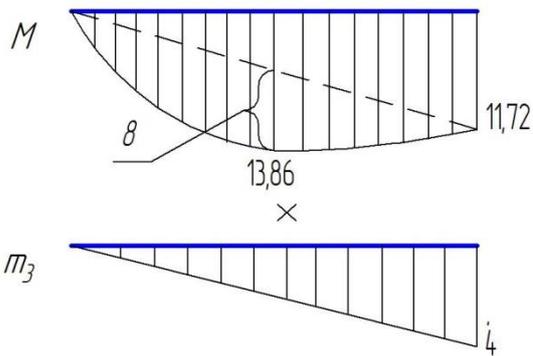
$$\sum \int \frac{M \cdot m_3 ds}{EJ} \quad (1.8)$$

Отсюда:

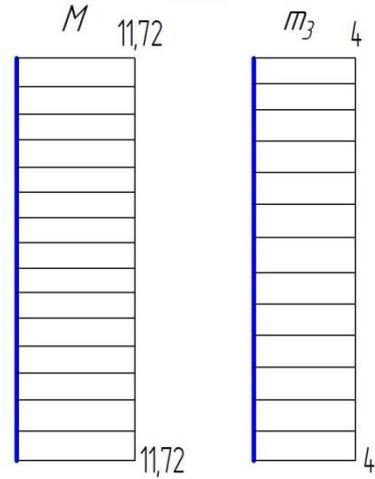
Наименование стержней	Участки эпюр		Произведение, (кНм ²)
	Площади участков эпюры M, (кНм)	Ординаты эпюры m ₃ , (м)	
1-2	$\frac{1}{2} \cdot 11,72 \cdot 4 = 23,44$	$\frac{2}{3} \cdot 4 = 2,67$	62,58
	$\frac{4 \cdot 4^3}{12} = 21,3$	$\frac{1}{2} \cdot 4 = 2$	42,6
2-3	$11,72 \cdot 4 = 46,88$	4	187,52
3-4	$\frac{1}{2} \cdot 8,56 \cdot 4 = 17,12$	-4	-68,48
	$\frac{1}{2} \cdot 8,56 \cdot 4 = 17,12$	$-\frac{2}{3} \cdot 4 = -2,67$	-45,71
	$\frac{1}{2} \cdot 11,72 \cdot 4 = 23,44$	4	93,76
	$\frac{1}{2} \cdot 11,72 \cdot 4 = 23,44$	$\frac{1}{3} \cdot 4 = 1,33$	31,18
4-5	$8,56 \cdot 4 = 34,24$	-8	-273,92
5-7-8	$\frac{1}{2} \cdot 15,57 \cdot 2 = 15,57$	-4	-62,28
	$\frac{1}{2} \cdot 15,57 \cdot 2 = 15,57$	$-\frac{2}{3} \cdot 4 = -2,67$	-41,57

	$\frac{1}{2} \cdot 9,72 \cdot 2 = 9,72$	4	38,88
	$\frac{1}{2} \cdot 9,72 \cdot 2 = 9,72$	$\frac{1}{3} \cdot 4 = 1,33$	12,93
	$\frac{1}{2} \cdot 9,72 \cdot 2 = 9,72$	$\frac{2}{3} \cdot 4 = 2,67$	25,95
		$\Sigma M \cdot m_3 ds =$	(495,46 - 491,96) = 3,5

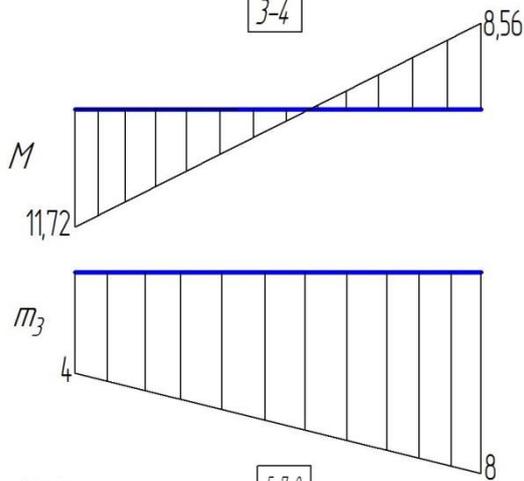
1-2



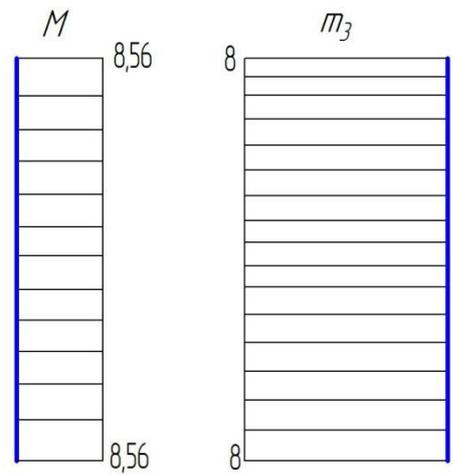
2-3



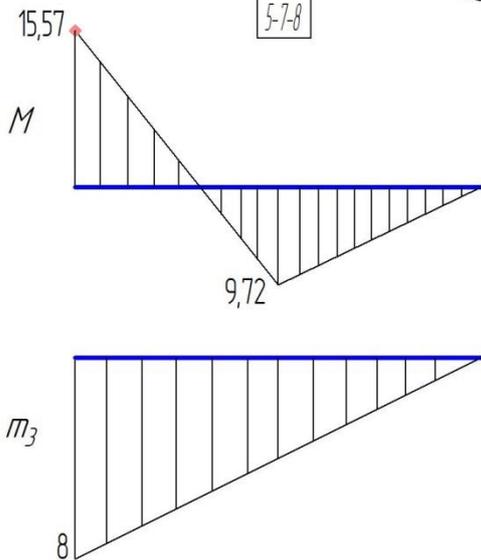
3-4



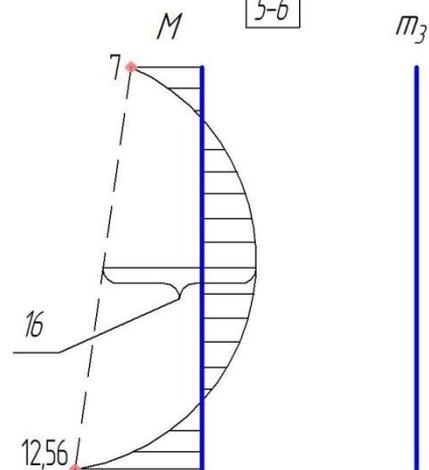
4-5



5-7-8



5-6



Отсюда:
$$\sum \int \frac{M \cdot m_3 ds}{EJ} = \frac{3,5}{EJ}$$

Определяем погрешность вычислений:

$$\frac{3,5 \cdot 100\%}{495,46} = 0,7\% < 3\%$$

6.