

## Лабораторная работа № 6

### Определение перемещений при изгибе балки

Цель работы:

- изучение методов определения перемещений в балках;
- экспериментальное и расчётное определение прогиба и угла поворота в двухопорной балке;
- сравнение экспериментальных и расчётных результатов.

#### Основные сведения

Определение перемещений является важной задачей для анализа различных упругих систем, в частности балок. В сопротивлении материалов перемещения точек балки обычно связывают с перемещениями соответствующих поперечных сечений.

Для балки различают два вида перемещений поперечных сечений (рис. 6.1):

$V$  – прогиб, или поперечное линейное перемещение центра сечения;

$\theta$  – угол поворота, или угловое перемещение сечения (вокруг нейтральной оси сечения).

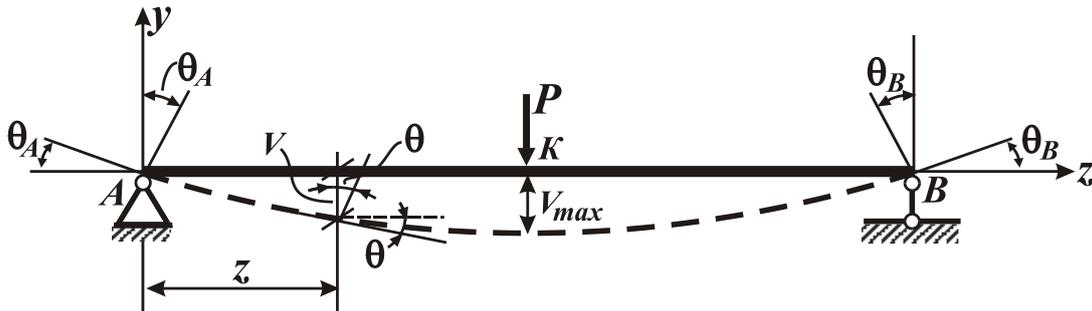


Рис. 6.1

Чаще всего необходимо определять перемещения отдельных сечений упругой системы. Например, для шарнирно-опёртой балки, нагруженной посередине сосредоточенной силой (см. рис. 6.1), практический интерес представляют прогиб среднего сечения ( $V_K$ ) и угол поворота концевых сечений ( $\theta_A$  и  $\theta_B$ ), так как они являются максимальными перемещениями (соответственно для прогибов и углов поворота) в балке.

В таких случаях обычно используют метод Максвелла–Мора (*метод единичной нагрузки*). В методе единичной нагрузки перемещение поперечного сечения балки определяется по формуле

$$\delta = \int_l \frac{\mathcal{M}_1 \mathcal{M} dz}{EJ_x}, \quad (6.1)$$

где  $\delta$  – искомое перемещение (прогиб  $V$  или угол поворота  $\theta$  сечения);  $l$  – длина балки;  $EJ_x$  – жёсткость балки на изгиб;  $\mathcal{M} = \mathcal{M}(z)$ ,  $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1(z)$  –

изгибающие моменты в произвольном сечении балки от заданной нагрузки (для грузового состояния) и от единичной нагрузки (для единичного состояния).

Для прямолинейной балки постоянной жёсткости интеграл (6.1) удобно вычислять по способу Верещагина, используя следующую формулу:

$$\delta = \frac{1}{EJ_x} \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \eta_i, \quad (6.2)$$

где  $\omega_i$  – площадь  $i$ -ой части грузовой эпюры;  $\eta_i$  – ордината единичной эпюры, расположенная под центром площади грузовой эпюры;  $n$  – число простых фигур, на которые разбивается грузовая эпюра.

Перед вычислением перемещения грузовую эпюру необходимо разбить на простые геометрические фигуры, для которых известны площадь и положение центра площади, а соответствующий участок единичной эпюры должен представлять прямую линию.

На рис. 6.2 изображены грузовое состояние ( $ГС$ ) и соответствующие единичные состояния ( $ЕС_1, ЕС_2$ ) балки и показаны эпюры изгибающих моментов, необходимые для определения максимальных значений прогиба ( $V_K$ ) и угла поворота ( $\theta_A$ ) в шарнирно-опёртой балке:

- грузовая эпюра (эн.  $\mathcal{M}$ ) от заданной нагрузки (силы  $P$ );
- единичная эпюра (эн.  $\mathcal{M}_1$ ) силы  $\bar{P} = 1$ , приложенной в сечении  $K$ ;
- единичная эпюра (эн.  $\mathcal{M}_2$ ) от момента  $\bar{M} = 1$ , приложенного в сечении  $A$ .

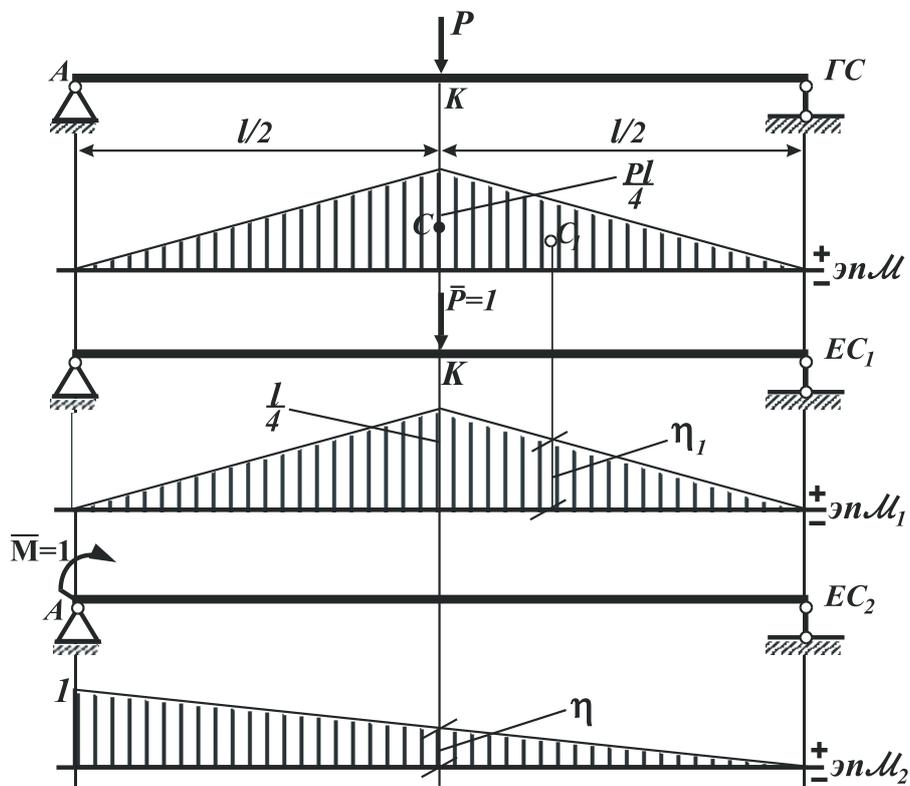


Рис. 6.2

Выполнив «*перемножение эюр*» по формуле (6.2) (см. рис. 6.2)

$$V_K = 2 \frac{\omega_1 \cdot \eta_1}{EJ_x}, \quad \theta_A = \frac{\omega \cdot \eta}{EJ_x}$$

и преобразовав полученные выражения, получим расчётные формулы для искомых перемещений:

$$V_K = \frac{Pl^3}{48EJ_x}, \quad \theta_A = \frac{Pl^2}{16EJ_x}. \quad (6.3)$$

Эти формулы рекомендуется получить самостоятельно.

### Методика испытания

Испытание проводят для стальной балки стандартного двутаврового сечения. Балку шарнирно закрепляют в концевых сечениях, а нагрузку в виде сосредоточенной силы прилагают в среднем сечении балки.

Целью испытания является экспериментальное определение прогиба среднего сечения и угла поворота одного из опорных сечений балки. Схема испытательной установки с измерительными приборами показана на рис. 6.3, а.

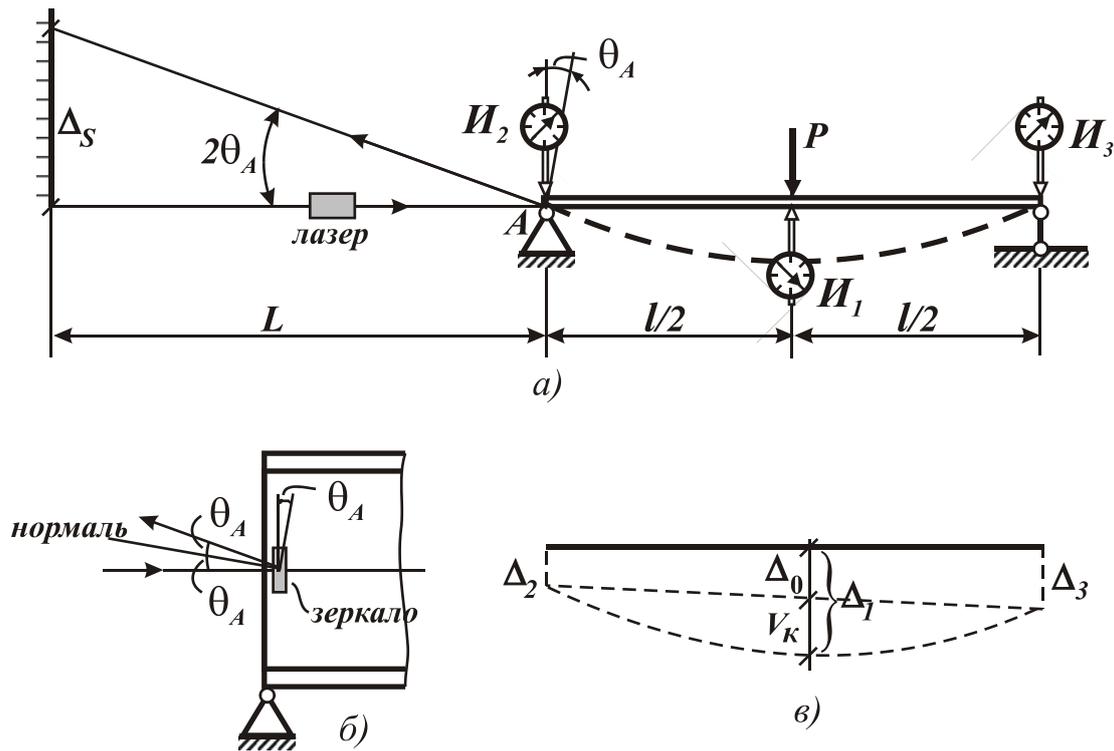


Рис. 6.3

Для определения прогиба применяют три индикатора часового типа: один индикатор ( $I_1$ ) установлен под балкой, посередине пролёта; два других индикатора ( $I_2$  и  $I_3$ ) установлены над опорными сечениями балки. Индикаторы закрепляют на индикаторных стойках так, чтобы они своими подвижными штоками упирались в полки балки для измерения поперечных перемещений соответствующих сечений балки.

*Примечание.* Индикатор измеряет полное линейное перемещение точки балки в направлении установленного штока независимо от причины такого перемещения – вследствие деформирования балки или её смещения как абсолютно жёсткого тела. В то же время, под прогибом понимается только деформационная часть линейного перемещения. Индикаторы  $I_2, I_3$  как раз и предназначены для определения перемещений опорных сечений балки (за счёт осадки опор): если их показания отличны от нуля, то это означает, что балка смещается как жёсткое тело.

По показаниям индикаторов определяются линейные перемещения  $\Delta_j$  в рассматриваемых сечениях балки по формуле

$$\Delta_j = m_{\text{и}} \cdot \Delta n_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (6.4)$$

где  $m_{\text{и}}$  – цена деления шкалы индикатора;  $\Delta n_j$  – разность показаний  $j$ -го индикатора на ступень нагружения.

На рис. 6.3, в изображена условная схема изменения положения оси балки и показаны перемещения ( $\Delta_j$ ) соответствующих сечений (условно принято, что  $\Delta_3 > \Delta_2$ ).

Таким образом, показания индикатора  $I_1$  соответствуют полному перемещению среднего сечения

$$\Delta_1 = V_K + \Delta_0 = V_K + \frac{1}{2}(\Delta_2 + \Delta_3),$$

где  $V_K$  – прогиб среднего сечения балки;  $\Delta_0$  – перемещение среднего сечения за счёт смещения балки как жёсткого тела.

Отсюда экспериментальное значение прогиба среднего сечения балки определяется по формуле

$$V_K = \Delta_1 - \frac{1}{2}(\Delta_2 + \Delta_3). \quad (6.5)$$

Методика измерения угла поворота опорного сечения основана на применении зеркального угломера. Для этого в опорном сечении  $A$  балки вертикально закрепляют зеркало (рис. 6.3, б). Из источника света (лазера) луч направляется на зеркало, а положение отраженного луча фиксируется на вертикально расположенной линейке (см. рис. 6.3, а). Расстояние  $L$  между зеркалом и линейкой называется *базой угломера*. В исходном положении балки падающий и отраженный лучи света расположены в одной горизонтальной плоскости. При нагружении балки жёстко закрепленное зеркало вместе с сечением поворачивается на угол  $\theta_A$ , что приводит к отклонению отражённого луча света на угол  $2\theta_A$  (*угол отражения равен углу падения*) в вертикальной плоскости (см. рис. 6.3, б). Смещение отраженного луча в вертикальной плоскости (величину  $\Delta_s$ ) определяют на шкале линейки (см. рис. 6.3, а). Из геометрического соотношения

$$\text{tg} 2\theta_A = \frac{\Delta_s}{L},$$

с учётом малости угловых перемещений ( $\text{tg} 2\theta_A \approx 2\theta_A$ ) получим формулу

для экспериментального определения угла поворота опорного сечения:

$$\theta_A = \frac{\Delta_s}{2L}. \quad (6.6)$$

### Проведение испытания и обработка опытных данных

Испытания проводятся на универсальном гидравлическом прессе ГМС–50 (рис. 6.4).

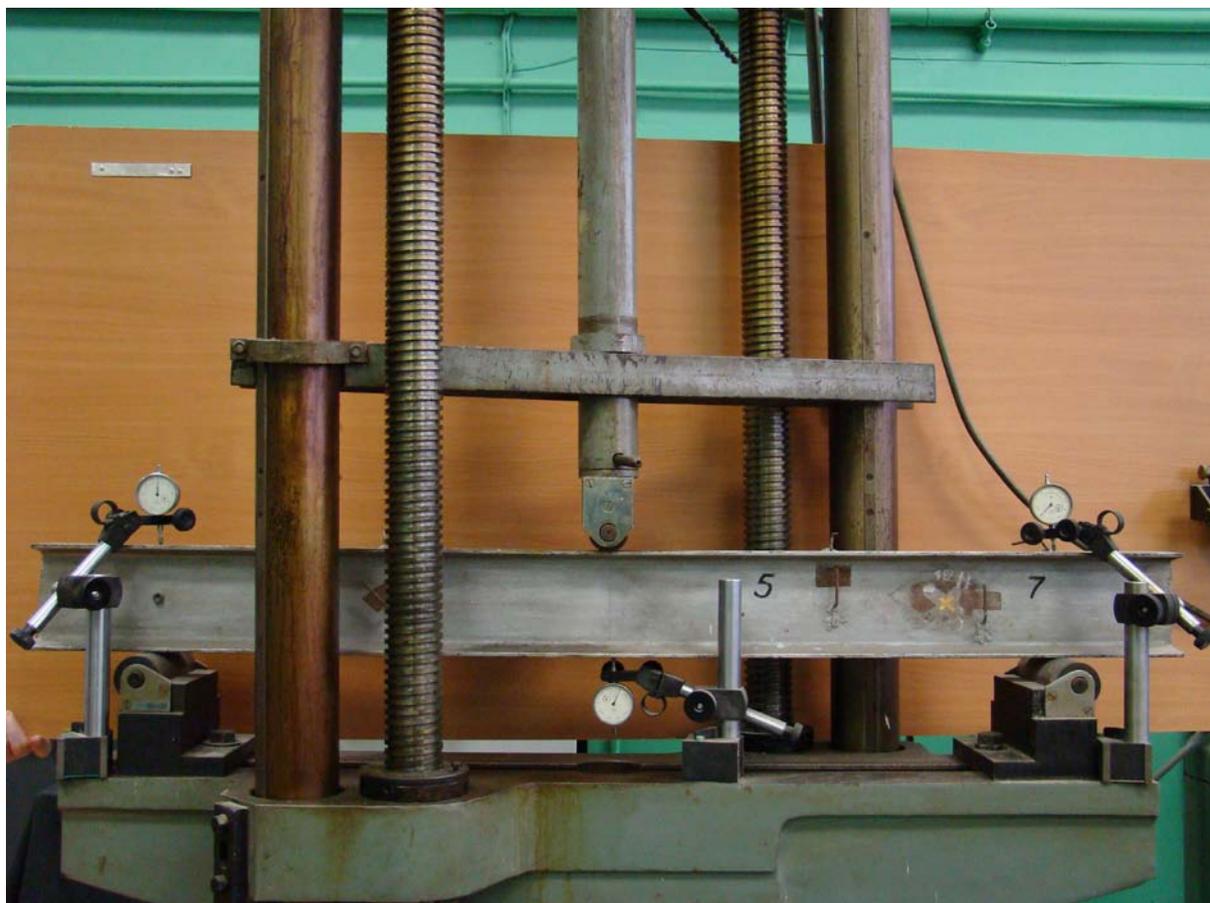


Рис. 6.4

Испытательная установка характеризуется следующими параметрами:

- длина балки  $l = 120$  см; база угломера  $L = 840$  см;
- момент инерции двутаврового сечения  $J_x = 712$  см<sup>4</sup>;
- модуль упругости стали  $E = 200$  ГПа;
- цена деления шкалы индикатора  $m_{\text{и}} = 0,01$  мм/дел.

Для испытания балку горизонтально устанавливают на два опорных катка, расположенных на верхней плоскости траверсы испытательной машины и обеспечивающих шарнирное закрепление балки в концевых сечениях. В сечениях над опорами и посередине балки на штативах установлены три индикатора часового типа (см. рис. 6.4). Нагрузку в виде вертикальной сосредоточенной силы  $P$  прилагают в среднем сечении балки. Последовательно производят ступенчатое статическое нагружение балки. Для

каждого значения нагрузки  $P_i$  ( $i = 1, 2$ ) снимаются показания трёх индикаторов ( $n_j$ ) и угломера (вертикальное смещение  $\Delta_S$  отраженного луча по шкале линейки), которые необходимо внести в таблицу результатов испытания (табл. 6.1).

*Примечание.* Для удобства определения разностей  $\Delta n_j$  индикаторы выставлены «на ноль» при нагружении балки силой  $P_1$ .

Таблица 6.1

*Результаты испытания балки*

$P_i$ , кН	$\Delta P$ , кН	$n_1^{(i)}$	$\Delta n_1$	$n_2^{(i)}$	$\Delta n_2$	$n_3^{(i)}$	$\Delta n_3$	$\Delta_S$ , мм
6		0		0		0		
36		83		6		4		32

После проведения испытания балки необходимо обработать опытные данные. Для этого подсчитывают разности  $\Delta n_j = n_j^{(2)} - n_j^{(1)}$  показаний индикаторов для ступени нагружения  $\Delta P = P_2 - P_1$  и вносят в таблицу результатов испытания.

### Экспериментальные результаты

Определение экспериментальных значений прогиба и угла поворота сечений балки провести в следующей последовательности:

- вычислить значения перемещений  $\Delta_j$  в сечениях балки, где установлены индикаторы, по формуле (6.4);
- определить экспериментальное значение прогиба среднего сечения балки по формуле (6.5);
- определить экспериментальное значение угла поворота опорного сечения балки по формуле (6.6).

### Расчётные результаты

Расчётные значения прогиба и угла поворота сечений двухопорной балки получить по формулам (6.3), приняв  $P = \Delta P$ .

### Отчет по лабораторной работе № 6

Внести экспериментальные и расчётные значения (с точностью до сотых) прогиба и угла поворота сечений балки

Таблица 6.2

Величины	$V_K$ , мм	$\theta_A$ , град
Эксперимент	_____	_____
Расчёт	_____	_____